

Colectivo GraCa

Sitio web mantenido por Maicoliv desde el 25 de enero de 2009

¿Por qué utilizamos el método de Gauss-Jordan para encontrar la matriz inversa de otra dada?

Veámoslo con un ejemplo.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar su inversa consiste en encontrar la matriz A^{-1}

que verifica $A \cdot A^{-1} = I_3$.

Si tomamos $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & t & a \\ y & u & b \\ z & v & c \end{pmatrix}$, la igualdad sería

$$\begin{pmatrix} x+3y-z & t+3u-v & a+3b-c \\ x+y+z & t+u+v & a+b+c \\ 3x+3y & 3t+3v & 3a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que obtendríamos 3 sistemas de ecuaciones con 3 ecuaciones y 3 incógnitas cada uno, igualando las columnas. Observemos que los tres serían idénticos salvo por el nombre de las variables y por los términos independientes, esto es, escritos en forma matricial, sólo los distinguirían las columnas de los coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ al comparar las primeras columnas y}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ al comparar las otras dos.}$$

Como las transformaciones que haríamos sobre las tres matrices para resolver los tres sistemas de ecuaciones serían las mismas, ya que coinciden las matrices de coeficientes, lo que hacemos es escribir los tres sistemas juntos,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

de tal forma que, si aplicando el método de Gauss-

Jordan conseguimos transformar la matriz de coeficientes en la identidad, los elementos finales de la primera columna de la derecha serán las soluciones del primer sistema de ecuaciones, esto es, los valores de x , y , z , que recordemos son los valores buscados para la primera columna de A^{-1} . Análogamente, la segunda y tercera columnas obtenidas tras aplicar el método anterior serán la segunda y tercera columnas, respectivamente, de la matriz inversa buscada. ■

No es una demostración, sólo un ejemplo, pero, ¿acaso no es cierto que la justificación dada para esta matriz podríamos darla para cualquier otra?

Pues ahí van unas preguntas:

- 1. ¿Te atreves a demostrar que el método de Gauss – Jordan permite encontrar la matriz inversa de cualquier otra matriz cuadrada de orden 3 (siempre que sea inversible)?**
- 2. ¿Por qué si al aplicar el método de Gauss – Jordan encontramos una fila de ceros en la matriz de coeficientes podemos asegurar que no tiene inversa?**