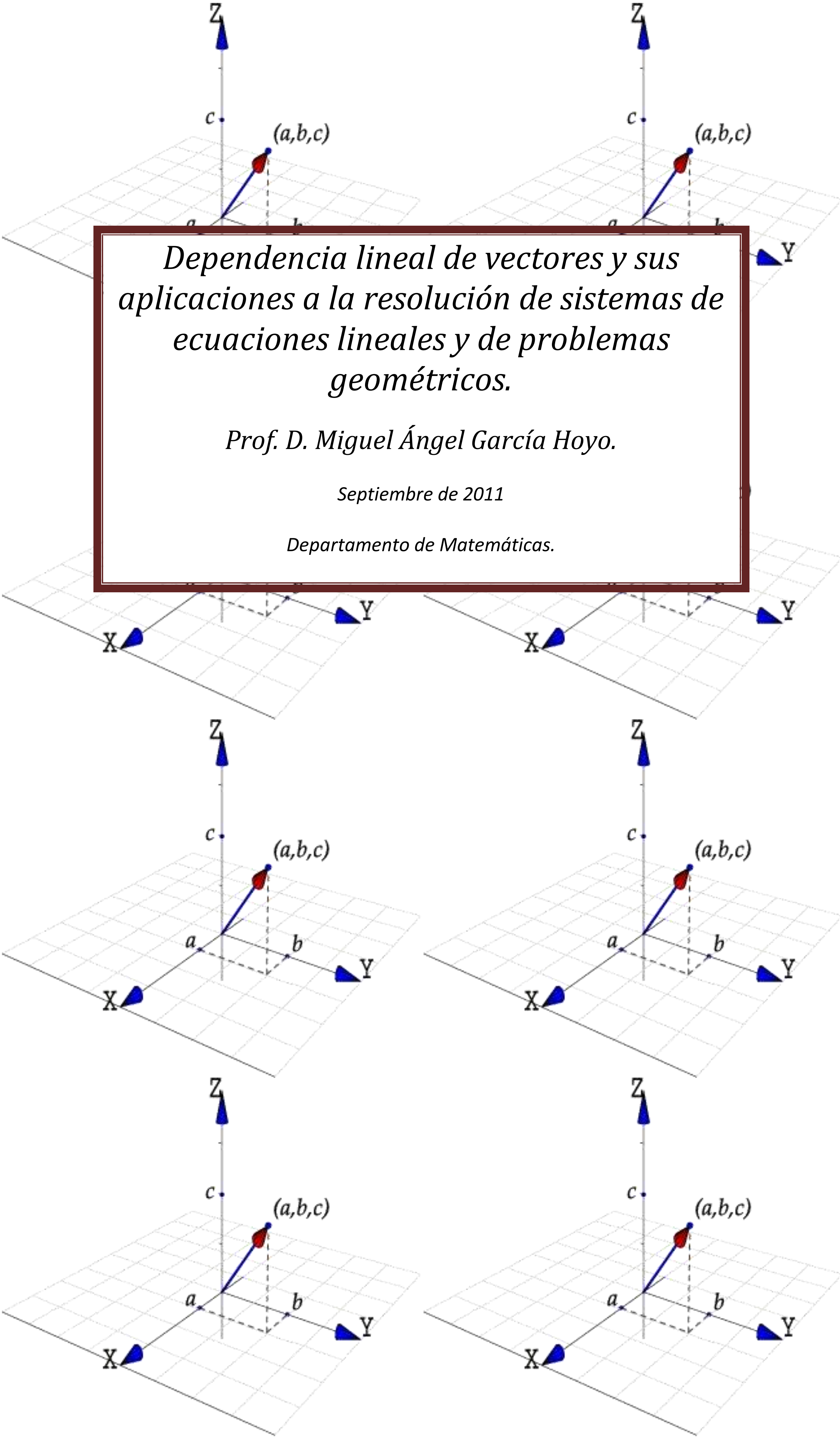

Dependencia lineal de vectores y sus aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y de problemas geométricos.

Prof. D. Miguel Ángel García Hoyo.

Septiembre de 2011

Departamento de Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1. Combinaciones lineales de vectores en el plano.

Definición 1 (Combinación lineal de dos vectores en el plano)

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera del plano.

Llamamos combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a cualquier expresión del tipo

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$$

Siendo α , β dos números reales cualesquiera. (Simbólicamente: α , $\beta \in \mathbb{R}$).

Observación

Evidentemente, al efectuar las operaciones asociadas a una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, obtendremos un nuevo vector del plano, ya que:

- *Al multiplicar un número real por un vector del plano se obtiene otro vector del plano.*
- *Al sumar dos vectores del plano se obtiene otro vector del plano.*

Ejemplo 1 (Cálculo de una combinación lineal)

Dados $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 5)$, obtener el vector resultante de la siguiente combinación lineal:

$$5 \cdot \vec{u} - 3 \cdot \vec{v}$$

Resolución.

$$5 \cdot \vec{u} - 3 \cdot \vec{v} =$$

$$= 5 \cdot (2\,, 3) - 3 \cdot (-1\,, 5) =$$

$$= (10\,, 15) — (-3\,, 15) =$$

$$= (10 — (-3)\,, 15 - 15) =$$

$$= (13\,, 0) \blacksquare$$

Ejemplo 2 (Encontrar una combinación lineal que coincida con un vector dado)

Encontrar una combinación lineal de $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 5)$ cuyo resultado sea igual al vector $\vec{w} = (7\,, 17)$.

Resolución.

Nos piden encontrar $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ con α , $\beta \in \mathbb{R}$, cuyo resultado coincida con $\vec{w}$.

Operando obtenemos: $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (2,3) + \beta \cdot (-1,5) = (2\alpha, 3\alpha) + (-\beta, 5\beta) =$

$$= (2\alpha - \beta\,, 3\alpha + 5\beta)$$

Luego $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{w}}$ *si y sólo si* $(2\alpha - \beta\,, 3\alpha + 5\beta) = (7\,, 17)$

Puesto que dos vectores del plano son iguales si y sólo si coinciden coordenada a coordenada, la igualdad anterior será cierta si y sólo si alfa y beta son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 7 \\ 3\alpha + 5\beta = 17 \end{cases}$$

Se comprueba con facilidad que la única solución del sistema anterior es:

$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Podemos por tanto concluir que ***la única*** *combinación lineal en las condiciones buscadas es:*

$$4 \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + 1 \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3 (Encontrar una combinación lineal que coincida con un vector dado)

Encontrar una combinación lineal de $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{4})$ *y* $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{1}, -\mathbf{2})$ *cuyo resultado sea igual al vector* $\vec{\boldsymbol{w}} = (\mathbf{7}\,, \mathbf{17})$.

Resolución.

Nos piden encontrar $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ *con* $\alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$, *cuyo resultado coincida con* $\vec{\boldsymbol{w}}$.

Operando obtenemos: $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \alpha \cdot (2,4) + \beta \cdot (-1,-2) =$

$$= (2\alpha, 4\alpha) + (-\beta, -2\beta) =$$

$$= (2\alpha - \beta\,, 4\alpha - 2\beta)$$

Luego $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{w}}$ *si y sólo si* $(2\alpha - \beta\,, 4\alpha - 2\beta) = (7\,, 17)$

Puesto que dos vectores del plano son iguales si y sólo si coinciden coordenada a coordenada, la igualdad anterior será cierta si y sólo si alfa y beta son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 7 \\ 4\alpha - 2\beta = 17 \end{cases}$$

Multiplicando la primera de las ecuaciones por 2, se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 14 \\ 4\alpha - 2\beta = 17 \end{cases}$$

Que es evidentemente incompatible (no tiene ninguna solución) ya que es imposible que ambas igualdades sean verdaderas simultáneamente.

Podemos por tanto concluir que ***no existe ninguna*** *combinación lineal en las condiciones buscadas.*

Simbólicamente:

$$\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \neq \vec{\boldsymbol{w}} \;\; para\ cualesquiera \;\; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Interpretación geométrica de la solución anterior

Si representamos gráficamente $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$ *en el plano vectorial, comprobaremos que ambos vectores están situados sobre la misma recta, esto es, tienen la misma dirección. Puesto que en dicha representación podemos interpretar las combinaciones lineales de dichos vectores como desplazamientos sucesivos siguiendo las direcciones de los mismos, podemos concluir que ninguna de dichas combinaciones "saldrá" en ningún momento de la recta que los contiene.*

De otro lado, si representamos gráficamente el vector $\vec{\boldsymbol{w}}$*, veremos que éste se encuentra "fuera" de la recta determinada por* $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$*.*

Es por lo anterior que no es posible encontrar ninguna combinación lineal en las condiciones propuestas por el enunciado.

Del razonamiento anterior podemos extraer la siguiente proposición general:

Proposición 1 (Combinación lineal de dos vectores paralelos)

Si dos vectores del plano tienen la misma dirección, todas las combinaciones lineales de ambos dan lugar a vectores con esa misma dirección.

O lo que resulta equivalente:

Ninguna combinación lineal de dos vectores paralelos tiene por resultado un vector de dirección distinta a la de aquellos.

Simbólicamente:

$$(\vec{\boldsymbol{u}} \parallel \vec{\boldsymbol{v}}) \implies [\vec{\boldsymbol{u}} \parallel (\boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}) \;\; \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}]$$

Y para el enunciado equivalente:

$$\left. \begin{matrix} (\vec{\boldsymbol{u}} \parallel \vec{\boldsymbol{v}}) \\ \wedge \\ (\vec{\boldsymbol{u}} \nparallel \vec{\boldsymbol{w}}) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\vec{\boldsymbol{w}} \neq \boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \quad , \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R} \right)$$

Ejemplo 4 (Encontrar una combinación lineal que coincida con un vector dado)

Encontrar una combinación lineal de $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{4})$ *y* $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{1}, -\mathbf{2})$ *cuyo resultado sea igual al vector* $\vec{\boldsymbol{w}} = (\mathbf{11}\,, \mathbf{22})$*.*

Resolución.

Nos piden encontrar $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ *con* $\alpha\,,\ \beta\ \in \mathbb{R}$*, cuyo resultado coincida con* $\vec{\boldsymbol{w}}$*.*

Operando obtenemos: $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = (2\alpha - \beta\,, 4\alpha - 2\beta)$

Puesto que dos vectores del plano son iguales si y sólo si coinciden coordenada a coordenada, la igualdad anterior será cierta si y sólo si alfa y beta son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 11 \\ 4\alpha - 2\beta = 22 \end{cases}$$

Multiplicando la primera de las ecuaciones por 2, se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 22 \\ 4\alpha - 2\beta = 22 \end{cases}$$

Por ser las dos ecuaciones iguales, las soluciones serán las parejas de valores de $\boldsymbol{\alpha}\ y\ \boldsymbol{\beta}$ *que verifiquen* $4\alpha - 2\beta = 22$ *o equivalentemente (sin más que despejar), las parejas de valores de* $\boldsymbol{\alpha}\ y\ \boldsymbol{\beta}$ *que verifiquen* $\beta = \frac{4\alpha - 22}{2} = 2\alpha - 11$*.*

Podemos por tanto concluir que ***existen infinitas*** *combinaciones lineales en las condiciones buscadas, todas de la forma* $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + (2\alpha - 11) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ *con* $\alpha\ \in \mathbb{R}$ *cualquiera.* ■

Interpretación geométrica del resultado obtenido en el ejemplo anterior

En este caso los tres vectores están alineados y podemos encontrar infinitas formas de conseguir el tercero mediante repeticiones de los movimientos indicados por los dos primeros.

Se deja al lector la comprobación de que, en la respuesta anterior, tomando para alfa los valores 0, 1, 5, 15, -10 y 0'25 se obtiene siempre el vector buscado.

No debe interpretarse la existencia de infinitas soluciones como si toda combinación lineal de los dos primeros vectores diese lugar al tercero. Más aún, en realidad hay más combinaciones que no cumplen lo pedido que las que sí lo hacen.

Se propone de nuevo al lector la comprobación de que son muchas las combinaciones lineales de $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *que no dan lugar a* $\vec{w}$*.*

Se anima igualmente a intentar demostrar que dicho número no sólo es elevado, sino también infinito.

De los ejemplos anteriores podemos adelantar la siguiente consecuencia, que sirve para evidenciar la relación existente entre combinaciones lineales de vectores y sistemas de ecuaciones lineales.

Proposición 2 (Relación entre combinaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales)

Cada problema relacionado con encontrar combinaciones lineales de dos vectores del plano cuyo resultado coincida con un tercer vector del plano tiene asociado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y viceversa. De forma más precisa:

Sean $\vec{u} = (u_1 , u_2)$, $\vec{v} = (v_1 , v_2)$, $\vec{w} = (w_1 , w_2)$ *tres vectores del plano y* α , β *dos números reales* ***prefijados****. Entonces:*

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \alpha + v_1 \cdot \beta = w_1 \\ u_2 \cdot \alpha + v_2 \cdot \beta = w_2 \end{cases}$$

Dicho de otro modo, aún más preciso:

$$La\ igualdad\ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \vec{w}\ es\ verdadera \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta)\ es\ solución\ del\ sistema \begin{cases} u_1 \cdot x + v_1 \cdot y = w_1 \\ u_2 \cdot x + v_2 \cdot y = w_2 \end{cases}$$

Demostración

$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \vec{w}$ *es verdadera*

(1) *si y sólo si* $\alpha \cdot (u_1 , u_2) + \beta \cdot (v_1 , v_2) = (w_1 , w_2)$ *es verdadera,*

(2) *si y sólo si* $(\alpha \cdot u_1 , \alpha \cdot u_2) + (\beta \cdot v_1 , \beta \cdot v_2) = (w_1 , w_2)$ *es verdadera,*

(3) *si y sólo si* $(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot v_1 , \alpha \cdot u_2 + \beta \cdot v_2) = (w_1 , w_2)$ *es verdadera,*

(4) *si y sólo si* $\begin{cases} u_1 \cdot \alpha + v_1 \cdot \beta = w_1 \\ u_2 \cdot \alpha + v_2 \cdot \beta = w_2 \end{cases}$ *son ambas verdaderas,*

(5) *si y sólo si* (α, β) *es solución del sistema* $\begin{cases} u_1 \cdot x + v_1 \cdot y = w_1 \\ u_2 \cdot x + v_2 \cdot y = w_2 \end{cases}$

(c.q.d.) *(como queríamos demostrar)*

Veamos cómo se justifica cada uno de los pasos anteriores

- ***(1)*** *Por hipótesis del enunciado.*
- ***(2)*** *Por definición de producto de un número por un vector.*
- ***(3)*** *Por definición de suma de dos vectores.*
- ***(4)*** *Por definición de relación de igualdad entre vectores.*
- ***(5)*** *Por definición de solución de un sistema de ecuaciones.*

Ejemplo 5 (Aprovechar una combinación lineal para resolver un sistema de ecuaciones lineales)

Se sabe que $\mathbf{3 \cdot \vec{u} + 5 \cdot \vec{v} = (8, 2)}$, *siendo* $\vec{u} = (a\,, b)\,, \vec{v} = (c\,, d)$.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax + cy = 8 \\ bx + dy = 2 \end{cases}$

Resolución

Basta tener presente la proposición anterior para concluir que (x,y)=(3,5) es solución del sistema dado.

Hay que observar que no sabemos si el sistema admite más soluciones ya que nada nos permite decidir si la combinación lineal dada es la única con esos vectores cuyo resultado coincide con (8,2). ■

La proposición anterior no sólo nos será importante de forma práctica, sino también y quizá sobre todo, en el marco teórico, ya que nos asegura que cualquier proposición relativa a combinaciones lineales tiene su proposición correspondiente en el ámbito de los sistemas de ecuaciones lineales y viceversa. Adelantamos aquí un ejemplo de lo expuesto en este párrafo.

Supongamos, para ello, demostrada la siguiente proposición por todos conocida:

Proposición 3 (Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2x2)

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener:

(1) *Ninguna solución (Sistema incompatible)*
(2) *Una única solución (Sistema compatible determinado) o*
(3) *Infinitas soluciones (Sistema compatible indeterminado).*

Su proposición equivalente para combinaciones lineales de dos vectores sería:

Proposición 4 (Nº de combinaciones lineales de dos vectores del plano que coinciden con un tercero)

El número de combinaciones lineales de dos vectores del plano que coinciden con un tercero puede ser:

(1) *Ninguna*
(2) *Sólo una, o*
(3) *Una infinidad.*

Demostración de la proposición 4

Por la proposición 2 sabemos que encontrar dichas combinaciones lineales equivale a resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y, por la proposición 3, este sistema podrá tener ninguna, sólo una o infinitas soluciones. ***(c.q.d.)***

Resumen del capítulo 1

Hasta aquí la primera sección de este tratado, en la que hemos presentado:

- *la definición de combinación lineal de dos vectores del plano,*

- *por medio de ejemplos primero y después de forma general, que el número de combinaciones lineales de dos vectores del plano que coinciden con un tercero puede ser 0 , 1 ó ∞,*
- *la relación existente entre el concepto geométrico "combinación lineal de dos vectores del plano" y el concepto algebraico "solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas",*
- *que podemos aprovechar la relación anterior para resolver problemas geométricos por medios algebraicos y problemas algebraicos haciendo uso de conceptos y métodos geométricos.*

Nos queda, no obstante bastante trabajo por delante, pues no son pocas las preguntas para las que no hemos dado respuesta. Por ejemplo, ¿podremos inventar algún método que haga fácil decidir, una vez dados tres vectores, cuántas combinaciones lineales de los dos primeros darán como resultado el tercero? O su enunciado equivalente ¿podremos inventar algún método que haga fácil decidir cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones lineales?

De responder a éstas y otras preguntas importantes nos ocuparemos en los próximos capítulos.

Capítulo 2. Dependencia lineal de vectores.

Definición 2 (Dependencia lineal de un vector respecto de dos vectores en el plano)

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tres vectores cualesquiera del plano.

Diremos que $\vec{w}$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si existe alguna combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyo resultado coincida con $\vec{w}$. En caso contrario diremos que $\vec{w}$ no depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Simbólicamente: $\vec{w}$ *depende linealmente de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ / \vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$

Ejemplo 6 (Determinar si un vector depende linealmente de otros dos)

Siendo $\vec{u} = (2,1), \vec{v} = (4,6), \vec{w} = (0,3)$ *, determine si* $\vec{w}$ *depende linealmente de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

Resolución

Tenemos que decidir si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ / \vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$

Operando: $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = (2\alpha + 4\beta, \alpha + 6\beta)$

Que coincidirá con $\vec{w} = (0,3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha + 6\beta = 3 \end{cases} \xleftrightarrow{E_2 \to (-2 \cdot E_2)} \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ -2\alpha - 12\beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\xleftrightarrow{E_2 \to (E_1 + E_2)} \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ -8\beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4 \cdot \frac{3}{4} = 0 \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 = 0 \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-3}{2} \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Por lo tanto, $\vec{w} = \frac{-3}{2} \cdot \vec{u} + \frac{3}{4} \cdot \vec{v}$ *, luego* $\vec{w}$ *depende linealmente de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ ■

Observación

Si bien las definiciones de combinación lineal y de dependencia lineal se han dado para dos vectores del plano con el fin de facilitar su comprensión, se extienden con facilidad a cualquier número de vectores en un espacio vectorial de cualquier dimensión. Así, una combinación lineal de un solo vector $\vec{u}$ *será cualquier expresión de la forma* $\alpha \cdot \vec{u}$ *con* α *un número real cualquiera, y diremos que* $\vec{w}$ *depende linealmente de* $\vec{u} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \ / \vec{w} = \alpha \cdot \vec{u}$ *teniendo los vectores 2, 3, 4 ,… coordenadas.*

Las definiciones generales, para cualquier número de vectores, serían:

Definición 3 (Combinación lineal de un número cualquiera de vectores)

Llamamos combinación lineal de n vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ *del mismo espacio vectorial a cualquier expresión del tipo*

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{u_3} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{u_n} \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Notación (Sumatorio)

Escribiremos de forma abreviada $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{u_3} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{u_n}$

Definición 4 (Dependencia lineal de un vector respecto de un conjunto cualquiera de vectores)

Sean $\vec{w}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ *vectores cualesquiera del mismo espacio vectorial.*

Diremos que $\vec{w}$ *depende linealmente de* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ *si* $\vec{w}$ *puede escribirse como combinación lineal de* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n}$*, esto es, si* $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *tales que* $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

Ejemplo 7 (Determinar si un vector depende linealmente de otros tres)

Determine si $\vec{w} = (1, 1)$ *depende linealmente de* $\overrightarrow{u_1} = (3, 2), \overrightarrow{u_2} = \left(1, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{u_3} = (-6, -4)$

Resolución

Hay que comprobar si $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\}$ *tales que* $\vec{w} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

Operando: $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \cdot \vec{u}_i = \left(3\alpha_1 + \alpha_2 - 6\alpha_3, 2\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - 4\alpha_3\right)$

Que coincidirá con

$$\vec{w} = (1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 - 6\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - 4\alpha_3 = 1 \end{cases} \underset{E_2 \longrightarrow -3E_2}{\overset{E_1 \longrightarrow 2E_1}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 6\alpha_1 + 2\alpha_2 - 12\alpha_3 = 2 \\ -6\alpha_1 - 2\alpha_2 - 12\alpha_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{E_2 \longrightarrow E_1 + E_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6\alpha_1 + 2\alpha_2 - 12\alpha_3 = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}$$ *que no admite ninguna solución por ser la segunda igualdad siempre falsa.*

Por lo tanto no existe ninguna combinación lineal de los $\vec{u}_i$ *cuyo resultado coincida con* $\vec{w}$.

Luego $\vec{w}$ *no depende linealmente de* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ ■ .

Definición 5 (Conjunto de vectores linealmente dependientes)

Sean $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ *vectores cualesquiera del mismo espacio vectorial.*

Diremos que $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ *es un conjunto de vectores linealmente dependientes, o de forma abreviada que* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ *son linealmente dependientes, si alguno de los vectores* $\vec{u}_i$ *depende linealmente de los restantes. En caso contrario diremos que son linealmente independientes.*

Simbólicamente:

$$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n} \text{ son linealmente dependientes} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q. } \vec{u}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_j \cdot \vec{u}_j \text{ con } \alpha_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$$

$$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n} \text{ son linealmente independientes} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}_i \neq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_j \cdot \vec{u}_j, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall \alpha_j \in \mathbb{R}, j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$$

Ejemplo 8 (Determinar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente)

Siendo $\overrightarrow{u_1} = (1, 3), \overrightarrow{u_2} = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right), \overrightarrow{u_3} = (-3, -1)$ *determine si son linealmente dependientes o independientes los siguientes conjuntos:*

1. $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$
2. $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}\}$
3. $\{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$
4. $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$

Resolución

1. *Observando que* $\overrightarrow{u_2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \overrightarrow{u_1}$ *podemos concluir que*

$\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ *es un conjunto de vectores linealmente dependientes.* ***(c.q.d.)***

2. *Debemos comprobar si* $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{u_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_3}$, *o bien* $\overrightarrow{u_3} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_1}$

La primera igualdad será cierta si y sólo si $\begin{cases} -3\alpha = 1 \\ -\alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-1}{3} \\ \alpha = -3 \end{cases}$ *que de forma evidente no pueden ser ciertas de forma simultánea, por lo que* $\boxed{\overrightarrow{u_1} \neq \alpha \cdot \overrightarrow{u_3}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \textit{ (I)}.}$

Análogamente, la segunda igualdad será cierta si y sólo si $\begin{cases} \alpha = -3 \\ 3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$ *que de forma evidente no pueden ser ciertas de forma simultánea, por lo que* $\boxed{\overrightarrow{u_3} \neq \alpha \cdot \overrightarrow{u_1}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \textit{ (II)}.}$

*Por **(I)** y **(II)** podemos concluir que* $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes.* ***(c.q.d.)***

3. *Debemos comprobar si* $\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{u_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_3}$*, o bien* $\overrightarrow{u_3} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_2}$

Aprovecharemos los resultados obtenidos en los dos primeros apartados para comprobar que lo anterior no es posible. Lo haremos introduciendo el método de demostración denominado ***reducción al absurdo****.*

Hipótesis de partida: supongamos cierto que $\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{u_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_3}$*, o bien* $\overrightarrow{u_3} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_2}$

Como sabemos que $\overrightarrow{u_2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \overrightarrow{u_1}$ *la hipótesis de partida resultaría en:*

Debiere ser cierto que $\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ *tal que* $\frac{\sqrt{7}}{2}\overrightarrow{u_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_3}$*, o bien* $\overrightarrow{u_3} = \alpha \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\overrightarrow{u_1}\right)$

Y equivalentemente, debiere ser cierto que $\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ *t.q.* $\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \alpha\right) \cdot \overrightarrow{u_3}$*, o bien* $\overrightarrow{u_3} = \left(\alpha \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\overrightarrow{u_1}$

Ahora bien, en tal caso $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}\}$ *sería linealmente dependiente, lo que contradice lo demostrado en el apartado 2. Por lo tanto la hipótesis de partida debe de ser falsa, pudiendo entonces concluir que*

$\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independiente.* ***(c.q.d.)***

4. *Debemos comprobar si* $\exists \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$ *tales que* $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_2} + \beta \cdot \overrightarrow{u_3} & \text{, o bien} \\ \overrightarrow{u_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_1} + \beta \cdot \overrightarrow{u_3} & \text{, o bien} \\ \overrightarrow{u_3} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_1} + \beta \cdot \overrightarrow{u_2} & \end{cases}$

Basta tomar $\overrightarrow{u_2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \overrightarrow{u_1} + 0 \cdot \overrightarrow{u_3}.$

Por lo tanto $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ *es un conjunto de vectores linealmente dependientes.* ***(c.q.d.)***

Tras las definiciones nos proponemos ahora presentar algunas propiedades que nos ayudarán a decidir con más facilidad que con la definición, que es lo que hemos hecho en los ejemplos anteriores, si dados varios vectores son o no linealmente dependientes.

Proposición 5(Criterio para determinar si dos vectores planos son linealmente dependientes)

$\vec{u} = (a, b), \vec{v} = (c, d)$ *son linealmente dependientes sii* $a \cdot d - b \cdot c = 0$

Demostración

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\vec{u} = (a, b), \vec{v} = (c, d)$ *son linealmente dependientes sii* $\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ $/ \begin{cases} \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} & (1) \\ \quad \text{o bien} & \\ \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u} & (2) \end{cases}$

$$(1)\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} \Leftrightarrow (a, b) = (\alpha c, \alpha d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha c \\ b = \alpha d \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\boldsymbol{c = 0} \text{ ó } \boldsymbol{d = 0} \text{ ó } \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = \frac{a}{c}} \\ \boldsymbol{\alpha = \frac{b}{d}} \end{cases} \right)$$

Veamos que en cualquiera de los tres casos se verifica $\boldsymbol{a \cdot d - b \cdot c = 0}$

- *Si* $\boldsymbol{c = 0 \Longrightarrow a = \alpha \cdot 0 = 0 \Longrightarrow a \cdot d - b \cdot c = 0 \cdot d - b \cdot 0 = 0 - 0 = 0} \blacksquare$
- *Si* $\boldsymbol{d = 0 \Longrightarrow b = \alpha \cdot 0 = 0 \Longrightarrow a \cdot d - b \cdot c = a \cdot 0 - 0 \cdot c = 0 - 0 = 0} \blacksquare$
- *Si* $\begin{cases} \boldsymbol{\alpha = \frac{a}{c}} \\ \boldsymbol{\alpha = \frac{b}{d}} \end{cases} \boldsymbol{\Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Longrightarrow a \cdot d = b \cdot c \Longrightarrow a \cdot d - b \cdot c = 0} \blacksquare$

$(\mathbf{2})$ *Se prueba de forma análoga al caso* $(\mathbf{1})$. *Se deja al lector dicha prueba a modo de ejercicio.*

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Hay que demostrar que* $\boldsymbol{a \cdot d - b \cdot c = 0 \Longrightarrow \{\vec{u}\,,\ \vec{v}\}}$ *es un conjunto de vectores linealmente dependientes.*

$$\boldsymbol{a \cdot d - b \cdot c = 0 \Longrightarrow a \cdot d = b \cdot c \Longrightarrow \left(c = 0 \text{ ó } d = 0 \text{ ó } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \right)}$$

- *Si* $\boldsymbol{c = 0 \Longrightarrow b \cdot c = 0 \Longrightarrow a \cdot d = 0 \Longrightarrow} \begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \\ \text{ó} \\ \boldsymbol{d = 0} \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\vec{u} = (a,b) = (0,b), \vec{v} = (c,d) = (0,d) \Longrightarrow} \begin{cases} \boldsymbol{\vec{u} = \frac{b}{d} \cdot \vec{v}\,, si\ d \neq 0} \\ \boldsymbol{\vec{u} = 0 \cdot \vec{v}\,, si\ d = 0} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{u}\,, \vec{v}\ son\ lin.dep.} \blacksquare} \\ \text{ó} \\ \boldsymbol{\vec{v} = (c,d) = (0,0) = 0 \cdot \vec{u}} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{u}\,, \vec{v}\ son\ lin.dep.} \blacksquare} \end{cases}$$

- *Si* $\boldsymbol{d = 0}$ *la prueba es análoga al caso anterior y se deja como ejercicio para el lector.*
- *Si* $\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow} \begin{cases} \boldsymbol{a = c \cdot \alpha} \\ \wedge \\ \boldsymbol{b = d \cdot \alpha} \end{cases} \boldsymbol{\Longrightarrow \vec{u} = (a,b) = (c \cdot \alpha, d \cdot \alpha) = \alpha \cdot (c,d) = \alpha \cdot \vec{v}}$

Y por tanto $\boxed{\boldsymbol{\vec{u}\,, \vec{v}\ son\ lin.dep.} \blacksquare}$ ***(Nota:** el símbolo* $\wedge$ *representa a la conjunción* ***y)***

Probadas entonces las dos implicaciones queda probada la proposición.

Definición 8 (Determinante de dos vectores planos)

Dada la utilidad de la operación anterior entre las coordenadas para ***determinar*** *la dependencia o independencia de dos vectores del plano, definiremos el* ***determinante*** *de dos vectores del plano* $\boldsymbol{\vec{u} = (a,b), \vec{v} = (c,d)}$ *y lo denotaremos por* $\boldsymbol{det(\vec{u},\vec{v})}$, $\boldsymbol{|\vec{u}\,\vec{v}|}$ ó $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$ *como:*

$$det(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}\,\vec{v}| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

Regla práctica

Obsérvese que se trata de multiplicar los elementos de las dos diagonales y restar los resultados obtenidos.

Con esta definición, podemos enunciar la proposición 5 como sigue:

Corolario de la proposición 5 (Criterio para determinar si dos vectores del plano son lin. dep.)

Dos vectores del plano $\vec{u}\,,\vec{v}$ *son linealmente dependientes si y sólo si* $\mathbf{det}(\vec{u},\vec{v}) = 0$

Demostración

Es trivial teniendo en cuenta la proposición 5 y la definición 8.

Ejemplo 9

Estudie la dependencia lineal de los vectores $\vec{u} = (4,3), \vec{v} = (6,5)$.

Resolución

Basta tener presente que $\vec{u}\,,\vec{v}$ *son linealmente dependientes si y sólo si* $de\,t(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0$

$de\,t(\vec{u}\,,\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot 3 = 20 - 18 = 2 \neq 0$ *por lo tanto:*

$\vec{u}\,,\vec{v}$ *son linealmente independientes.* ***(q.e.d.)*** *(quod erat demonstrandum) (lo que se quería demostrar)*

Se dejan como ejercicio al lector las demostraciones de las siguientes proposiciones 6, 7 y 8 acerca de la dependencia lineal de vectores del plano, algunas de ellas son consecuencia directa del corolario anterior.

Proposición 6 (Dependencia lineal del vector nulo)

Cualquier conjunto de vectores en el que intervenga el vector nulo (0,0) es linealmente dependiente.

Proposición 7 (Dependencia lineal en conjuntos unitarios)

Cualquier conjunto formado por sólo un vector es linealmente independiente siempre que el vector no sea el vector nulo.

Convenio

Aceptamos, por convenio, que cualquier conjunto al que pertenezca el vector nulo es linealmente dependiente aun en el caso de ser el único elemento del conjunto, ya que con la dependencia lineal pretendemos estudiar las direcciones que es posible recorrer usando los vectores del conjunto y el vector nulo no representa ninguna dirección.

Proposición 8 (Intercambio de posición de los vectores en un determinante)

$$det(\vec{u},\vec{v}) = -\,det(\vec{v},\vec{u}) \text{ para cualesquiera vectores del plano}$$

Definición 9 (Sistemas generadores y bases de un espacio vectorial)

Un conjunto de vectores de un espacio vectorial se dirá que forma un sistema generador de dicho espacio vectorial si cualquier vector de éste depende linealmente de los vectores del conjunto.

Simbólicamente:

Sean $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial cualquiera.* $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\} \subset \mathbb{V}$ *se dirá **sistema generador** de* $\mathbb{V}$ *si y sólo si*

$\vec{w}$ *depende linealmente de* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ $, \forall \vec{w} \in \mathbb{V}$

*Además, si un sistema generador es linealmente independiente diremos que es una **base** de* $\mathbb{V}$**.**

***Nota:** puede probarse que en el caso de disponer de una base, la combinación lineal de cualquier vector respecto de ella es única. De este hecho deriva la posibilidad de asignar coordenadas a los vectores de un espacio vectorial respecto de cualquier base del mismo. Su demostración general escapa de las intenciones de este tratado, pero quedará probado en parte, para el caso del plano, con la siguiente proposición, supuestas asignadas coordenadas a sus vectores respecto de la base canónica (formada por vectores perpendiculares y unitarios).*

Proposición 9 (Dos vectores planos linealmente independientes forman un sistema generador)

Si dos vectores del plano $\vec{u}, \vec{v}$ *son linealmente independientes entonces cualquier otro vector del plano* $\vec{w}$ *es combinación lineal de ellos dos. (Se deduce entonces, por definición, que forman una base del plano). Además, dicha combinación lineal es única.*

Demostración

Por ser $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ *linealmente independientes, sabemos que* $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$

Veamos que de este supuesto se deduce que

$$\forall \; vector \; del \; plano \; \vec{w} = (w_1, w_2) \;, \exists \alpha(\vec{w}), \beta(\vec{w}) \in \mathbb{R} \text{ tales que } \vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$$

Recordemos que lo anterior es equivalente a probar que $\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = w_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = w_2 \end{cases}$ *tiene alguna solución.*

Resolvamos el sistema y comprobemos que esto es así: (Nótese que las variables son alfa y beta y que las coordenadas de los vectores son números conocidos)

1. *Si* $u_1 \neq 0$ *y* $u_2 \neq 0$ *podemos multiplicar la primera ecuación por* u_2 *y la segunda por* $(-u_1)$ *para obtener un sistema equivalente:*

$$\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = w_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = w_2 \end{cases} \underset{E_2 \longrightarrow (-u_1) \cdot E_2}{\overset{E_1 \longrightarrow u_2 \cdot E_1}{\Longrightarrow}} \begin{cases} \alpha u_1 u_2 + \beta v_1 u_2 = w_1 u_2 \\ -\alpha u_2 u_1 + \beta v_2 u_1 = w_2 u_1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_2 \to E_1+E_2]{} \begin{cases} \alpha u_1 u_2 + \beta v_1 u_2 = w_1 u_2 \\ \beta \cdot (v_1 u_2 - v_2 u_1) = w_1 u_2 - w_2 u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{w_1 u_2 - \beta v_1 u_2}{u_1 u_2} \\ \beta = \dfrac{w_1 u_2 - w_2 u_1}{v_1 u_2 - v_2 u_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{w_1 - \beta v_1}{u_1} \\ \beta = \dfrac{det(\vec{w}, \vec{u})}{det(\vec{v}, \vec{u})} \end{cases}$$

Obsérvese ahora que la solución anterior, si existe será única, y existirá siempre y cuando no se anulen los denominadores, lo que sabemos que ocurre por estar suponiendo en este caso que $u_1 \neq 0$ *y* $det(\vec{v}, \vec{u}) = -det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ *por ser los vectores linealmente independientes por hipótesis del enunciado. Por lo tanto existe alguna solución del sistema y con ello*

queda probado que $\vec{w}$ *depende linealmente de forma única de* $\vec{u}, \vec{v}$ ■

2. *Se deja al lector como ejercicio probar que ocurre lo mismo si* $u_1 = 0$ *y que también ocurre lo mismo si* $u_2 = 0$ *, lo que completaría la demostración de la proposición.*

Corolario de la proposición 9 (Cardinal máximo de un conjunto de vectores linealmente independientes del plano y dimensión del plano vectorial)

Se deduce de la proposición anterior que:

1. *todo conjunto de vectores del plano formado por tres o más vectores es linealmente dependiente. Dicho de otro modo, todos los conjuntos de vectores del plano linealmente independientes están formados por uno o por dos vectores.*
2. *Todas las bases del espacio vectorial de los vectores del plano poseen exactamente dos vectores, por lo que diremos que es un espacio vectorial de dimensión 2.*

Demostración

1. *Probaremos el resultado para cualquier conjunto de tres vectores, y se dejará al lector la demostración para más de tres (bastará probar para ello la siguiente* ***proposición:*** *si a un conjunto linealmente dependiente añadimos un nuevo vector, el conjunto resultante será siempre linealmente dependiente).*

Sea $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *un conjunto cualquiera de vectores del plano. Puede ocurrir que los dos primeros sean linealmente dependientes o independientes. Veamos que en cualquier caso el conjunto es linealmente dependiente.*

- *Si $\vec{u},\vec{v}$ son linealmente dependientes entonces*

$$\begin{cases} \exists\alpha\in\mathbb{R}\ tal\ que\ \vec{u}=\alpha\cdot\vec{v} \\ o\ bien \\ \exists\alpha\in\mathbb{R}\ tal\ que\ \vec{v}=\alpha\cdot\vec{u} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists\alpha\in\mathbb{R}\ tal\ que\ \vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{w} \\ o\ bien \\ \exists\alpha\in\mathbb{R}\ tal\ que\ \vec{v}=\alpha\cdot\vec{u}+0\cdot\vec{w} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\ es\ linealmente\ dependiente\ (c.q.d.)}$$

- *Si $\vec{u},\vec{v}$ son linealmente independientes entonces, por la proposición anterior, sabemos que cualquier otro vector del plano puede escribirse de forma única como combinación lineal de aquéllos, y por lo tanto* $\boxed{\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\ es\ linealmente\ dependiente\ (c.q.d.)}$

2. *Se deja como ejercicio al lector.*

Teorema 10 (Versión reducida del teorema de Rouché-Fröbenius : determinantes y resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos variables.)

Consideremos el sistema de dos ecuaciones con dos variables $\begin{cases} a_1\cdot x+b_1\cdot y=c_1 \\ a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2 \end{cases}$*. Se verifican:*

1. *Si* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ *entonces el sistema es* ***compatible determinado*** *cualesquiera que sean los términos independientes.*
2. *Si* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ *y* $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ *y* $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ *entonces el sistema es* ***compatible indeterminado****.*
3. *Si* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ *y* $\left(\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0 \text{ ó } \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0\right)$ *entonces el sistema es* ***incompatible****.*

Demostración

1. *Por el corolario de la proposición 5,* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow det(\vec{u},\vec{v})\neq 0\ con\ \vec{u}=(a_1,a_2),\vec{v}=(b_1,b_2)\ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \vec{u}=(a_1,a_2),\vec{v}=(b_1,b_2)$ *son linealmente independientes y por la proposición 9 sabemos que cualquier otro vector del plano dependerá linealmente de ellos de forma única; en particular cualquier* $\vec{w}=(c_1,c_2)$ *depende linealmente de forma única de* $\vec{u},\vec{v}$*, esto es:*
$\exists!\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ t.q.\ \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{w}$ *lo que sabemos, por la proposición 2, que es equivalente a afirmar que el sistema de ecuaciones sometido a estudio tiene solución única* ***(c.q.d.)***

2. *Se deja como ejercicio para el lector.*
3. *Se deja como ejercicio para el lector.*

Ejemplo 10 (Discusión de sistemas de 2 ecuaciones con 2 variables)

1. *Discuta el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 5x+15y=0 \\ 6x+18y=0 \end{cases}$

2. *Discuta el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$

3. *Discuta el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro* $\boldsymbol{\lambda}$. $\begin{cases} \lambda x - y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Resolución

1. $\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} = 5 \cdot 18 - 15 \cdot 6 = 90 - 90 = 0$

$\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ *y* $\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 18 & 0 \end{vmatrix} = 0$ *por incluir ambos el vector nulo.*

Podemos asegurar entonces que el sistema es compatible indeterminado ■

2. $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = -4 + 8 = 4 \neq 0$

Por lo que podemos concluir que es compatible determinado ■

3. $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = \lambda + 2$

Así, $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ *de donde, aplicando el teorema 10 podemos concluir que* $\boxed{\text{el sistema es } \textbf{compatible determinado} \Leftrightarrow \lambda \neq -2}$ ***(I)***

Veamos qué ocurre ***si*** $\boldsymbol{\lambda = -2}$. *En tal caso el sistema será* $\begin{cases} -2x - y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ *y tenemos que comprobar si son o no nulos los dos determinantes formados por los coeficientes de* ***x*** *y los términos independientes, y por los coeficientes de* ***y*** *y los términos independientes. El primero de ellos es*

$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = -6 - 10 \neq 0$ *con lo que ya nos es posible asegurar que* $\boxed{\text{si } \lambda = -2 \text{ entonces el sistema es } \textbf{incompatible}}$ ***(II)***

De ***(I)*** *y* ***(II)*** *podemos concluir:*

El sistema es $\begin{cases} \textbf{compatible determinado} & \textbf{si } \lambda \neq -2 \\ \textbf{incompatible} & \textbf{si } \lambda = -2 \end{cases}$ ■

Resumen del capítulo 2

Con este último importante teorema y sus ejemplos de aplicación damos por cerrado el segundo capítulo del que podemos extraer:

- *La definición de vector linealmente dependiente de otros.*
- *La definición de conjunto de vectores linealmente dependientes.*
- *Ejemplos prácticos que muestran cómo determinar si un vector depende linealmente de otros dados utilizando la definición.*

- *Ejemplos prácticos que muestran cómo determinar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente utilizando la definición.*
- *Un criterio que permite determinar, con mayor facilidad que la propia definición, si dos vectores del plano son linealmente dependientes y la definición de determinante de dos vectores del plano, que nos permite referirnos y recordar con facilidad dicho criterio.*
- *Ejemplos prácticos de uso del criterio anterior.*
- *Que cualquier conjunto que incluya el vector nulo es linealmente dependiente y que todo conjunto formado por un solo vector es linealmente independiente (siempre que éste no sea el vector nulo)*
- *Que al intercambiar el orden de dos vectores del plano, su determinante cambia de signo, pero no de valor absoluto.*
- *Las definiciones de sistemas generadores y bases de un espacio vectorial, y que respecto de una base, cualquier vector de dicho espacio puede expresarse de forma única como combinación lineal de los vectores de la misma.*
- *Que dos vectores del plano linealmente independientes siempre forman una base del plano vectorial.*
- *Y como consecuencia de todas las definiciones y proposiciones presentadas en los dos primeros capítulos, el teorema 10 que nos muestra una versión reducida del teorema de Rouché-Fröbenius que permite decidir con facilidad si un sistema de dos ecuaciones con dos variables es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible sin más que calcular algunos determinantes. Recuerdo en este momento que dejamos el primer capítulo formulándonos la pregunta ¿podremos inventar algún método que haga fácil decidir cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones lineales? El teorema 10 responde parcialmente a esta pregunta, ya que nos permite decidir con facilidad cuántas soluciones tiene cualquier sistema de dos ecuaciones con dos variables.*
- *Los últimos ejemplos muestran cómo utilizar este importante teorema para la discusión de sistemas de dos ecuaciones con dos variables, siendo especialmente importante estudiar hasta entender sin dificultad el último de ellos, el ejemplo que depende de un parámetro, que debe verse como la discusión simultánea de infinitos sistemas de dos ecuaciones con dos variables, tantos como números reales pues para cada valor del parámetro se obtiene un sistema de ecuaciones diferente, pudiendo, al finalizar el ejercicio, decir si cada uno de ellos admite ninguna, una o infinitas soluciones.*

Se anima encarecidamente a demostrar todas las proposiciones que se han dejado como ejercicio al lector. De ese esfuerzo, aunque a veces no se llegue a culminar con la demostración completa y precisa, se produce el verdadero avance en la comprensión de los contenidos presentados.

Pudiéramos pensar que ya hemos alcanzado el fin que nos habíamos propuesto con la demostración del teorema 10, pero desgraciadamente no es así. Al fin y al cabo tan solo nos hemos ocupado hasta ahora de facilitarnos la discusión de sistemas de dos ecuaciones con dos variables (y, por ser dos variables, del *plano), lo que automáticamente hace aparecer nuevas preguntas. Probablemente las más importantes éstas que siguen:*

- *¿Podremos inventar algún método que nos permita encontrar con facilidad las soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos variables una vez que hayamos determinado que las tiene?*
- *¿Existirán métodos parecidos para sistemas con tres ecuaciones y tres variables? ¿Y cuatro y cuatro? ¿Y N ecuaciones con N variables? ¿Y para sistemas con distinto número de variables que de ecuaciones?*

En los siguientes capítulos no encargaremos de abordar éstas y otras cuestiones, de las que podemos adelantar que sí admiten una respuesta positiva.

A la primera responderemos al inicio del capítulo 3 presentando versiones reducidas para sistemas de dos ecuaciones con dos variables de la regla de Cramer y del método de Gauss (y de la mejora del mismo propuesta por Camille Jordan: método de Gauss-Jordan).

Para responder a la segunda deberemos presentar antes nuevos conceptos que nos hagan avanzar en el conocimiento y relaciones entre espacios vectoriales y sistemas de ecuaciones lineales. La presentación de las matrices y de algunas de sus propiedades centrará nuestro estudio en los próximos capítulos y nos prepararán para abordar las generalizaciones del teorema de Rouché-Fröbenius y de los métodos nombrados en el párrafo anterior para discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales con cualquier número de ecuaciones y de variables.

Antes de todo esto, propondré algunos ejercicios de recapitulación para los dos primeros capítulos.

Ejercicios propuestos

1. *Determine el resultado obtenido al operar con las combinaciones lineales $3\vec{u}-5\vec{v}$, siendo:*
   a. $\vec{u}=(-1,1), \vec{v}=(0,3)$
   b. $\vec{u}=(-3,2), \vec{v}=(1,1)$
2. *Utilice la definición para comprobar si $\vec{w}$ puede escribirse como combinación lineal de $\vec{u},\vec{v}$ en cada uno de los casos, y determine para cada uno de ellos el número de combinaciones lineales que es posible encontrar:*
   a. $\vec{u}=(0,3), \vec{v}=(0,-3), \vec{w}=(0,1)$
   b. $\vec{u}=(-2,-1), \vec{v}=(2,-1), \vec{w}=(-3,3)$
   c. $\vec{u}=(2,1), \vec{v}=(0,2), \vec{w}=(-3,2)$
3. *Utilice la definición para determinar si $\vec{w}$ depende linealmente de $\vec{u},\vec{v}$ en cada uno de los casos:*
   a. $\vec{u}=(-3,-3), \vec{v}=(-2,0), \vec{w}=(-2,3)$
   b. $\vec{u}=(-2,1), \vec{v}=(3,0), \vec{w}=(1,3)$
   c. $\vec{u}=(0,0), \vec{v}=(1,-1), \vec{w}=(-3,2)$
4. *Determine, por medio de la definición, si los conjuntos indicados en cada apartado son linealmente dependientes o independientes, siendo:*

$$\vec{u}=(-1,-1), \vec{v}=(-3,-1), \vec{w}=(-2,3), \vec{a}=(-3,-3,0), \vec{b}=(0,3,2), \vec{c}=(2,-3,-1)$$

a. $\{\vec{u},\vec{v}\}$
b. $\{\vec{u},\vec{w}\}$
c. $\{\vec{v},\vec{w}\}$
d. $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$
e. $\{\vec{a},\vec{b}\}$
f. $\{\vec{a},\vec{c}\}$
g. $\{\vec{b},\vec{c}\}$
h. $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$

5. *Enuncie y demuestre el criterio para comprobar si dos vectores del plano son linealmente dependientes; defina determinante de dos vectores del plano y reescriba el criterio anterior. Utilice este criterio para estudiar la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de dos vectores del plano:*
   a. $\{\vec{u}=(-1,2),\vec{v}=(-4,2)\}$
   b. $\{\vec{u}=(0,-2),\vec{v}=(-1,-4)\}$
   c. $\{\vec{u}=(-4,-5),\vec{v}=(2,0)\}$
   d. $\{\vec{u}=(1,-2),\vec{v}=(-4,8)\}$
   e. $\{\vec{u}=(-3,-4),\vec{v}=(-5,1)\}$
6. *Determine cuáles de los siguientes conjuntos forman una base del plano vectorial:*
   a. $\{\vec{u}=(5,0)\}$
   b. $\{\vec{u}=(5,1),\vec{v}=(-3,-2)\}$
   c. $\{\vec{u}=(-1,-1),\vec{v}=(3,3)\}$
   d. $\{\vec{u}=(-1,2),\vec{v}=(0,0)\}$
   e. $\{\vec{u}=(-1,-5),\vec{v}=(4,0)\}$
   f. $\{\vec{u}=(-1,-2),\vec{v}=(3,3),\vec{w}=(-1,3)\}$
7. *Determine los posibles valores del parámetro para los que los conjuntos dados sean una base del plano vectorial:*
   a. $\{\vec{u}=(5,1),\vec{v}=(-3,\lambda)\}$
   b. $\{\vec{u}=(-3,\lambda),\vec{v}=(1,0)\}$
   c. $\{\vec{u}=(0,-3),\vec{v}=(\lambda,0)\}$
   d. $\{\vec{u}=(\lambda-5,1),\vec{v}=(3,4)\}$
   e. $\{\vec{u}=(\lambda,1),\vec{v}=(-3,\lambda)\}$
   f. $\{\vec{u}=(\lambda+5,\lambda-1),\vec{v}=(2\lambda-3,-2\lambda)\}$
8. *Discuta los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables justificando la respuesta.*
   a. $\begin{cases}-5x+4y=-4\\ 3x-4y=3\end{cases}$
   b. $\begin{cases}-4x+2y=-5\\ x-\frac{1}{2}y=3\end{cases}$
   c. $\begin{cases}5x-3y=-4\\ 2x-\frac{6}{5}y=\frac{-8}{5}\end{cases}$
   d. $\begin{cases}-5x-y=\lambda\\ 4x-3y=\lambda\end{cases}$
   e. $\begin{cases}\lambda x-2y=-1\\ 4x+4y=-3\end{cases}$
   f. $\begin{cases}3x-4\lambda y=-4\\ 3x+5\lambda y=-1\end{cases}$
   g. $\begin{cases}\lambda x-4y=1\\ x-4\lambda y=1\end{cases}$
   h. $\begin{cases}(\lambda-3)x+y=3\\ -4x-\lambda y=3\end{cases}$

Capítulo 3. Resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos variables. Regla de Cramer y método de Gauss-Jordan.

Al final del capítulo anterior estábamos ya en condiciones de decidir con bastante facilidad el número de soluciones de cualquier sistema lineal con dos ecuaciones y dos variables. Nos proponemos ahora, una vez comprobado que un sistema dado admite alguna solución cuál o cuáles son éstas. Como se verá a continuación, al enunciar y demostrar la proposición 9 (dos vectores del plano linealmente independientes forman una base del plano) y el teorema 10 (versión reducida del teorema de Rouché-Fröbenius para sistemas lineales de dos ecuaciones y dos variables) estábamos en condiciones de dar su solución cuando el sistema resultaba ser compatible determinado, mas siendo la resolución de sistemas de ecuaciones lineales la intención principal de este tratado, se ha creído conveniente dedicarle a este asunto un capítulo completo.

Teorema 11 (Versión reducida de la regla de Cramer para resolver sistemas lineales de dos ecuaciones y dos variables compatibles determinados)

Sea $\boldsymbol{S}: \begin{cases} u_1x + v_1y = w_1 \\ u_2x + v_2y = w_2 \end{cases}$ *un sistema de dos ecuaciones lineales y dos variables. Se verifica:*

Si $\boldsymbol{S}$ *es compatible determinado, entonces su única solución es* $\begin{cases} x = \dfrac{det\,(\vec{w},\vec{v})}{det\,(\vec{u},\vec{v})} \\ y = \dfrac{det\,(\vec{u},\vec{w})}{det\,(\vec{u},\vec{v})} \end{cases}$ *siendo*

$$\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2), \vec{w} = (w_1, w_2)$$

Demostración

De acuerdo con el teorema 10, $\boldsymbol{S}$ *será compatible determinado si y sólo si* $det\,(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$ *. En tal caso y volviendo a revisar la demostración de la proposición 9, si* $u_1 \neq 0$ *y* $u_2 \neq 0$ *, la única solución de* $\boldsymbol{S}$ *será:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{w_1 - v_1 \cdot y}{u_1} \\ y = \dfrac{det\,(\vec{w},\vec{u})}{det\,(\vec{v},\vec{u})} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{w_1 - v_1 \cdot \dfrac{-det\,(\vec{u},\vec{w})}{-det\,(\vec{u},\vec{v})}}{u_1} \\ y = \dfrac{-det\,(\vec{u},\vec{w})}{-det\,(\vec{u},\vec{v})} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{w_1 \cdot det(\vec{u},\vec{v}) - v_1 \cdot det\,(\vec{u},\vec{w})}{det\,(\vec{u},\vec{v})}}{u_1} \\ y = \dfrac{det\,(\vec{u},\vec{w})}{det\,(\vec{u},\vec{v})} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{w_1 \cdot det(\vec{u},\vec{v}) - v_1 \cdot det\ (\vec{u},\vec{w})}{u_1 \cdot det\ (\vec{u},\vec{v})} \\ y = \dfrac{det\ (\vec{u},\vec{w})}{det\ (\vec{u},\vec{v})} \end{cases} \quad (I)$$

Obsérvese ahora que:

$$w_1 \cdot det(\vec{u},\vec{v}) - v_1 \cdot det(\vec{u},\vec{w}) = w_1 \cdot (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2) - v_1 \cdot (u_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot u_2) =$$

$$= w_1 \cdot u_1 \cdot v_2 - w_1 \cdot v_1 \cdot u_2 - v_1 \cdot u_1 \cdot w_2 + v_1 \cdot w_1 \cdot u_2 =$$

$$= w_1 \cdot u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_1 \cdot w_2 =$$

$$= u_1 \cdot (w_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot w_2) = u_1 \cdot det\ (\vec{w},\vec{v})$$

*Sustituyendo ahora en **(I)** la expresión anterior resulta* $\begin{cases} x = \frac{u_1 \cdot det\ (\vec{w},\vec{v})}{u_1 \cdot det\ (\vec{u},\vec{v})} \\ y = \frac{det\ (\vec{u},\vec{w})}{det\ (\vec{u},\vec{v})} \end{cases}$ *y simplificando:*

$$\begin{cases} x = \frac{det\ (\vec{w},\vec{v})}{det\ (\vec{u},\vec{v})} \\ y = \frac{det\ (\vec{u},\vec{w})}{det\ (\vec{u},\vec{v})} \end{cases} \quad si\ u_1 \neq 0 \wedge u_2 \neq 0\ (c.q.d.)$$

Quedaría por comprobar que el resultado también es cierto si alguno de los dos coeficientes de las x es nulo, cuya demostración se deja al lector.

Ejemplo 11 (Resolución de sistemas lineales compatibles determinados 2x2)

Discuta el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo en caso de resultar compatible determinado:

$$S: \begin{cases} -2x + 3y = 7 \\ -x - y = 3 \end{cases}$$

Resolución

Consideramos los vectores de coeficientes $\vec{u} = (-2,-1), \vec{v} = (3,-1)$ *y el de términos independientes* $\vec{w} = (7,3)$ *. En tal caso sabemos (versión reducida del teorema de Rouché-Fröbenius) que el sistema será compatible determinado si y sólo si* $det\ (\vec{u},\vec{v}) \neq 0$.

Como $det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 \neq 0.$

Por tanto el sistema es compatible determinado y el teorema 11 (regla de Cramer) nos permite asegurar que su única solución es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{det\ (\vec{w},\vec{v})}{det\ (\vec{u},\vec{v})} \\ y = \dfrac{det\ (\vec{u},\vec{w})}{det\ (\vec{u},\vec{v})} \end{cases}$$

Puesto que $\det(\vec{w},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7\cdot(-1) - 3\cdot 3 = -7 - 9 = -16$

Y $\det(\vec{u},\vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 7\cdot(-1) = -6 + 7 = 1$

Sustituyendo obtenemos la única solución de S *, que es* $\begin{cases} x = \frac{-16}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$ ■

Sustituya el lector la solución obtenida en el sistema inicial y compruebe su validez.

Ejemplo 12 (Resolución de cada uno de los sistemas de un conjunto de sistemas lineales 2x2 definido en función de un parámetro)

Consideremos el conjunto de sistemas de ecuaciones lineales

$$S_m : \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - m\cdot y = 4 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

(Obsérvese que se trata de un conjunto de infinitos sistemas de ecuaciones)

Discuta cada uno de los sistemas anteriores y resuelva todos aquellos que resulten ser compatibles determinados.

Resolución

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, sabemos que S_m *será compatible determinado* ⇔

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$$

De acuerdo con la regla de Cramer, $\forall m \neq 3$ *la única solución del sistema vendrá dada por*

$$\begin{cases} x = \dfrac{det\ (\vec{w},\vec{v})}{det\ (\vec{u},\vec{v})} \\ y = \dfrac{det\ (\vec{u},\vec{w})}{det\ (\vec{u},\vec{v})} \end{cases}$$ *donde los vectores son los vectores de coeficientes de **x**, de **y** y de términos independientes respectivamente respetando el orden alfabético.*

$$det(\vec{u},\vec{v}) = m - 3\ ;\ det(\vec{w},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -m \end{vmatrix} = -10m - 4\ ;$$

$$det(\vec{u},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 30 = -26$$

Sustituyendo obtenemos $\boxed{\forall m \neq 3, la\ \text{ú}nica\ soluci\text{ó}n\ de\ S_m\ es \begin{cases} x = \frac{-10m-4}{m-3} \\ y = \frac{-26}{m-3} \end{cases} \quad \blacksquare}$

Para S_3 *, de nuevo usando el teorema de Rouché, sabemos que será incompatible si*

$det(\vec{u},\vec{w}) \neq 0$ ó $det(\vec{w},\vec{v}) \neq 0$ *. Los calculamos:*

$det(\vec{u},\vec{w}) = -26$ *(no depende de m y ya lo habíamos calculado) no es nulo, luego*

$$\boxed{S_3\ es\ incompatible.\ \blacksquare}$$

Calcule el lector, como ejercicio, las soluciones de los sistemas $S_0, S_{100}\ y\ S_{-25}$ *y compruebe la validez de las soluciones obtenidas.*

*Queda, espero, clara la utilidad de la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Esto amplía el número de métodos disponibles para resolver dichos sistemas, para los que, hasta ahora, habíamos empleado los métodos de sustitución, igualación y reducción. En lo que sigue, vamos a presentar una mejora de éste último conocida como método de Gauss en su forma matricial, cuya primera referencia histórica (bajo el nombre: regla fan-chen) data ya del siglo II a.C. y se encuentra en el importantísimo tratado **Nueve capítulos sobre el arte matemático** que recogía de forma sistemática todos los conocimientos matemáticos de la cultura china de la época. En esencia consiste en observar que al aplicar el método de reducción efectuamos operaciones entre las ecuaciones del sistema actuando sólo sobre los coeficientes y términos independientes de las mismas, y nunca sobre las variables, con lo que una notación adecuada en la que no escribamos éstas debe ahorrarnos trabajo sin influir en las soluciones. Aprovecharemos para dotar al método de mayor rigor en su fundamentación que el que se ofrece al presentar por primera vez la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, para lo cual necesitaremos algunas definiciones, propiedades y notaciones adicionales.*

Definición 10 (Operaciones con ecuaciones: suma de ecuaciones y producto por un escalar)

Sean $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}$ dos ecuaciones lineales y $\boldsymbol{\alpha}$ un número real cualquiera. Consideraremos sobre las ecuaciones las operaciones "producto por un escalar" y "suma de dos ecuaciones" definidas como siguen:

- $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{se\ define\ la\ ecuaci\acute{o}n\ \alpha \cdot E_i}$ *como aquella que resulta de multiplicar cada miembro de $\boldsymbol{E_i}$ por $\boldsymbol{\alpha}$.*
- $\boldsymbol{Se\ define\ la\ ecuaci\acute{o}n\ E_1 + E_2}$ *como aquella cuyo primer miembro resulta de sumar los primeros miembros de ambas ecuaciones y análogamente el segundo.*

El método de Gauss se basa en el siguiente resultado, relacionado con la definición anterior:

Proposición 12 (Transformaciones elementales de un sistema de ecuaciones lineales)

Sea $\boldsymbol{S}$ un sistema con n ecuaciones lineales. Sean éstas $\boldsymbol{E_1, E_2, \dots, E_n}$. Se verifican:

1. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ *, el sistema $\boldsymbol{S}^*$ formado por $\boldsymbol{E_1, E_2, \dots, \alpha \cdot E_i, \dots, E_n}$ es equivalente a $\boldsymbol{S}$,* $\forall \boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1, 2, \dots n}\}$
2. *El sistema $\boldsymbol{S}^*$ formado por $\boldsymbol{E_1, E_2, \dots, E_{i-1}, E_i + E_j, E_{i+1}, \dots, E_n}$ es equivalente a $\boldsymbol{S}$,* $\forall \boldsymbol{i, j} \in \{\boldsymbol{1, 2, \dots n}\}$
3. *El sistema $\boldsymbol{S}^*$ obtenido al intercambiar dos ecuaciones de $\boldsymbol{S}$ es equivalente a éste.*

Notas:

- *Llamaremos transformación elemental de un sistema de ecuaciones lineales $\boldsymbol{S}$ al proceso de sustituir éste por cualquiera de los sistemas $\boldsymbol{S}^*$descritos en la proposición.*
- *El enunciado de esta proposición puede entonces leerse: "Si en un sistema de ecuaciones lineales sustituimos una de sus ecuaciones por el resultado de multiplicar dicha ecuación por un número real distinto de cero o por el resultado de sumar a dicha ecuación cualquier otra del sistema, el sistema de ecuaciones obtenido tendrá siempre el mismo conjunto de soluciones que el primero", o también: "Si a un sistema de ecuaciones lineales se le aplica cualquier transformación elemental obtendremos siempre un sistema de ecuaciones lineales equivalente al primero".*
- *Denotaremos las soluciones en forma vectorial pues estarán formadas por tantos elementos como variables tenga el sistema.*
- *Aprovechamos aquí para aclarar, aunque de manera informal, la interpretación que el autor hace de los conceptos de ecuación y de solución de una ecuación, por ser éstos entendidos de una forma más general de lo habitual. Se entiende en todo el tratado que una ecuación es una igualdad cualquiera establecida entre propiedades de los elementos de un conjunto dado. Ésta podrá ser evaluada como verdadera o falsa. En esta línea, las soluciones de la ecuación serán aquellos elementos del conjunto para los que la igualdad dada sea verdadera. Como se verá a continuación,*

este punto de vista permite probar resultados generales sobre ecuaciones y sus soluciones con mucho menor esfuerzo.

- *Dado el contexto en el que nos desenvolvemos en este desarrollo, cada ecuación será una igualdad establecida entre polinomios de primer grado en m variables, que darán lugar a un número real una vez sean evaluados para cada vector de m variables. Escribiremos* $E \equiv \{p_1(\vec{v}) = p_2(\vec{v}) / \vec{v} \in \mathbb{R}^m\}$*, lo que evidencia que el punto de vista adoptado es el de considerar una ecuación como un conjunto de igualdades entre números reales y cuyo número de soluciones vendrá dado por el número de igualdades verdaderas en* E*. En estos momentos está pendiente de preparación un tratado general y preciso sobre tal interpretación de los conceptos de ecuación, inecuación y sistema de ecuaciones.*

Demostración

H.q.d. (Hay que demostrar): $\vec{s}$ **es solución de** $S \Leftrightarrow \vec{s}$ **es solución de** S^*

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ $\vec{s}$ **es solución de** $S \Leftrightarrow E_1, E_2, \dots, E_n$ **son igualdades verdaderas para** $\vec{s}$

Ahora bien, puesto que la multiplicación de números reales verifica la ***propiedad uniforme****, que afirma: "si en una igualdad verdadera multiplicamos ambos miembros por la misma cantidad, los resultados obtenidos serán iguales* $(a = b \Longrightarrow \alpha \cdot a = \alpha \cdot b,\ \forall a, b, \alpha \in \mathbb{R})$*", podemos asegurar que*

$$E_1, E_2, \dots, \alpha \cdot E_i, \dots, E_n \text{ son igualdades verdaderas para } \vec{s}\,,$$ *esto es,*

$$\boxed{\vec{s} \text{ es solución de } S^* \ (c.q.d.)}$$

1. $\boxed{\Longleftarrow}$ *Basta comprobar que si* $\alpha \cdot E_i$ **es una igualdad verdadera para** $\vec{s}$ **con** $\alpha \neq 0$

Entonces E_i **es una igualdad verdadera para** $\vec{s}$ *. Pero esto es inmediato de aplicar el recíproco de la propiedad uniforme, esto es, la* ***propiedad cancelativa*** *de la multiplicación de números reales, que afirma:* $\alpha \cdot a = \alpha \cdot b \Longrightarrow \begin{cases} a = b \\ \quad \vee \\ \alpha = 0 \end{cases},\ \forall a, b, \alpha \in \mathbb{R}$

2. $\boxed{\Longrightarrow}$ *Bastará probar que si* E_i, E_j **son igualdades verdaderas para** $\vec{s}$ *entonces* $E_i + E_j$ **es una igualdad verdadera para** $\vec{s}$

Sean $E_i \equiv (p_1 = p_2), E_j \equiv (q_1 = q_2)$ *donde* p_i, q_i *son polinomios de primer grado.*

Entonces $E_i + E_j \equiv (p_1 + q_1 = p_2 + q_2)$

Por hipótesis, $\vec{s}$ *es solución de ambas ecuaciones, esto es,* $p_1(\vec{s}) = p_2(\vec{s}), q_1(\vec{s}) = q_2(\vec{s})$ *son verdaderas y bastará utilizar la* ***propiedad uniforme*** *de la suma de números reales para concluir que* $p_1(\vec{s}) + q_1(\vec{s}) = p_2(\vec{s}) + q_2(\vec{s})$ *es una igualdad verdadera. Por definición de suma de polinomios, la igualdad anterior equivale a* $(p_1 + q_1)(\vec{s}) = (p_2 + q_2)(\vec{s})$ *y por lo tanto:*

$$\boxed{\boldsymbol{E_i + E_j \text{ es una igualdad verdadera para } \vec{s}} \quad \blacksquare}$$

2. $\boxed{\Leftarrow}$ *Si* $\boldsymbol{\vec{s}}$ **es solución de** $\boldsymbol{S^*}$ *en particular*
$\boldsymbol{E_i + E_j}$ **y** $\boldsymbol{E_j}$ **son igualdades verdaderas para** $\boldsymbol{\vec{s}}$

H.q.d. $\boldsymbol{E_i}$ **es una igualdad verdadera para** $\boldsymbol{\vec{s}}$

Por 1. y la otra implicación de 2. , sabemos que

$$\boxed{\boldsymbol{(E_i + E_j) + (-1) \cdot E_j = E_i \text{ es una igualdad verdadera para } \vec{s}} \ \blacksquare}$$

El tercer punto de la proposición es trivial.

Las transformaciones elementales nos permiten entonces transformar un sistema de ecuaciones en otro diferente pero sin que se vean alteradas las soluciones del mismo. El método de Gauss propone un algoritmo que aprovecha lo anterior para conseguir un sistema de ecuaciones equivalente al dado pero más sencillo. Más exactamente uno escalonado, esto es, uno en el que la segunda ecuación no contiene la primera variable, la tercera ecuación ni la primera ni la segunda variable, y así sucesivamente.

Método de Gauss para sistemas 2x2 compatibles determinados

Sea $\boldsymbol{S}: \begin{cases} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{dx + ey = f} \end{cases}$. *Si es compatible determinado, podemos resolver el sistema usando el siguiente algoritmo:*

1. *Si* $a = 0, d \neq 0$ *intercambiamos las ecuaciones y pasamos al paso 3.*
2. *Transformamos* $E_2 \to a \cdot E_2 - d \cdot E_1$ *que siempre dará una ecuación en la que no aparece la primera variable.*
3. *Se obtendrá ahora el valor de la segunda variable despejando en la segunda ecuación, si el sistema es compatible determinado, una identidad, si el sistema es compatible indeterminado, y una igualdad numérica falsa si el sistema es incompatible (y habremos terminado).*
4. *Si el sistema es compatible determinado, bastará sustituir la segunda variable en la primera ecuación y despejar entonces la primera variable en la misma, habiendo así hallado su única solución.*

Notas:

- *Nos ocuparemos de la resolución de sistemas compatibles indeterminados en el siguiente capítulo.*
- *No consideramos* $a = 0, d = 0$ *porque entraría en contradicción con que el sistema sea compatible determinado.*
- *Puesto que las soluciones se obtienen tras aplicar transformaciones elementales al sistema original, las soluciones obtenidas lo serán también de éste.*

Ejemplo 13 (Resolución de un sistema compatible determinado de orden 2x2 por el método de Gauss)

Discuta y resuelva el sistema $\boldsymbol{S}: \begin{cases} \mathbf{2x - 5y = 4} \\ \mathbf{3x - 6y = 12} \end{cases}$ *utilizando el método de Gauss.*

Resolución

Por ser $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -12 - (-15) = 3 \neq 0$ *el teorema de Rouché-Fröbenius nos permite asegurar que el sistema es compatible determinado. Su única solución será:*

$$\boldsymbol{(x, y)\text{es solución de } S} \underset{(\boldsymbol{E_2 \longrightarrow 2 \cdot E_2 - 3 \cdot E_1})}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mathbf{2x - 5y = 4} \\ \mathbf{3y = 12} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{2x - 20 = 4} \\ \mathbf{y = 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x = 12} \\ \mathbf{y = 4} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 14 (Combinación del método de Gauss y la regla de Cramer)

Una vez convertido el sistema en escalonado, podemos usar la regla de Cramer para terminar de resolverlo, con la ventaja de resultar más sencillos los determinantes a calcular, puesto que algunos de ellos contienen ceros. En el ejemplo anterior:

$S \sim \begin{cases} \mathbf{2x - 5y = 4} \\ \mathbf{3y = 12} \end{cases}$ *; tomando* $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{0}), \vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{-5}, \mathbf{3}), \vec{\boldsymbol{w}} = (\mathbf{4}, \mathbf{12})$ *serán:*

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6; \quad det(\vec{w}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 12 — 60 = 72;$$

$$det(\vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 = 24$$

Aplicando la regla de Cramer $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{v}})}{\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})} = \dfrac{\mathbf{72}}{\mathbf{6}} = \mathbf{12} \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{w}})}{\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})} = \dfrac{\mathbf{24}}{\mathbf{6}} = \mathbf{4} \end{cases}$

(Nota: si bien aquí no parece muy claro el interés de usar estos dos métodos de forma conjunta, al resolver sistemas lineales con mayor número de ecuaciones y variables que el del ejemplo, se demostrará por sí sola su conveniencia en muchos casos, sobre todo en aquellos en los que intervienen parámetros.)

Aprovechamos ahora para introducir las matrices. Su introducción aquí viene recomendada por cuanto nos permitirán simplificar la ejecución del método de Gauss, así como establecer una notación que simplifique los enunciados del teorema de Rouché-Fröbenius y de la regla de Cramer, haciendo de camino más fácil recordarlos.

Definición 11 (Matriz de números reales)

Llamaremos matriz de números reales a un conjunto de números reales distribuidos en filas y columnas.

Usaremos, en general, letras mayúsculas para referirnos a ellas, y la misma letra pero minúscula para referirnos a sus elementos.

Los elementos se distinguirán unos de otros mediante dos subíndices, el primero de los cuales hará referencia a la fila en la que se encuentra situado cada elemento y el segundo a la columna.

*Una matriz con m filas y n columnas diremos que es una **matriz mxn**.*

*Llamamos **matriz nula** a aquella cuyos elementos son todos nulos.*

*Una matriz **A** se dice **escalonada superior (o inferior)** si* $\boldsymbol{a_{ij}} = \mathbf{0}\ \forall \boldsymbol{i} > j\ (\text{ó}\ \forall \boldsymbol{j} > i)$

*Llamaremos **matriz cuadrada de orden n** a cualquier matriz con n filas y n columnas.*

*Definimos el **determinante de una matriz cuadrada** como el determinante de los vectores formados por sus columnas.*

*Una matriz cuadrada escalonada superior (o inferior) se dirá **triangular superior (o inferior).***

*Una matriz cuadrada que sea a la vez triangular superior e inferior se dirá **diagonal.***

*En una matriz cuadrada llamaremos **diagonal principal** a la formada por los elementos de la forma* $\boldsymbol{a_{ii}}$

*La **diagonal secundaria** es la formada por los elementos* $\boldsymbol{a_{i,n+1-i}}$ *siendo n el orden de la matriz.*

*Llamamos **matriz unidad** a la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos 1.*

Ejemplo 15 (Ejemplos de matrices de números reales)

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ *es una matriz 1x2. Se denomina matriz fila.*

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ *es una matriz 2x1. Se denomina matriz columna.*

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{22} & c_{22} \end{pmatrix}$ *es una matriz cuadrada de orden 2. Su determinante será*

$$det(C) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{22} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21}$$

$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix}$ *es una matriz 2x3*

$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & e_{22} \end{pmatrix}$ *es una matriz triangular superior y* $F = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ *es triangular inferior.*

$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$ *es una matriz diagonal y I=* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es la matriz unidad o identidad de orden 2.*

$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ 0 & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ 0 & 0 & h_{33} & h_{34} \end{pmatrix}$ *es una matriz escalonada.*

Definición 12 (Matrices asociadas a un sistema de ecuaciones)

(Puesto que nos estamos ocupando de sistemas 2x2, y que son los más sencillos, daremos las definiciones siguientes asociadas a dichos sistemas. No obstante, resulta sencillo extender dichas definiciones a sistemas con otros números de ecuaciones o de variables)

Sea $\boldsymbol{S}: \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1} \\ \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1} \end{cases}$ *un sistema de ecuaciones lineales.*

Llamamos ***matriz de coeficientes*** *de* $\boldsymbol{S}$ *a la matriz* $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$.

Llamaremos $\boldsymbol{A_x}$ *a la matriz que resulta de sustituir en la matriz de coeficientes la primera columna por el vector formado por los términos independientes, esto es:* $\boldsymbol{A_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}$

Análogamente, $\boldsymbol{A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}$.

Definimos también la ***matriz ampliada*** *de* $\boldsymbol{S}$ *como* $\boldsymbol{B = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)}$

Con estas definiciones, podemos volver a enunciar los teoremas anteriores:

Teorema 13 (Teorema de Rouché-Fröbenius para sistemas 2x2 con notación matricial)

Sean $\boldsymbol{S}: \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1} \\ \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1} \end{cases}$ *un sistema de ecuaciones lineales y* $\boldsymbol{A}$ *su matriz de coeficientes. Entonces:*

1. $\boldsymbol{S}$ *es compatible determinado* $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{det\,(A) \neq 0}$
2. $\boldsymbol{S}$ *es compatible indeterminado* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{det(A) = 0} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{det(A_x) = 0} \end{cases}$
3. $\boldsymbol{S}$ *es incompatible en otro caso.*

Teorema 14 (Regla de Cramer para sistemas 2x2 con notación matricial)

En las condiciones del teorema anterior, si $\boldsymbol{S}$ *es compatible determinado, entonces su única solución es*

$$\begin{cases} x = \dfrac{\det(A_x)}{\det(A)} \\ y = \dfrac{\det(A_y)}{\det(A)} \end{cases}$$

No es necesaria una demostración para los teoremas anteriores pues son exactamente los demostrados previamente, pero introduciendo la notación matricial.

Forma matricial del método de Gauss-Jordan

Se trata de aplicar el método de Gauss a las filas de la matriz ampliada del sistema hasta conseguir una matriz escalonada. Veamos un ejemplo.

$$S: \begin{cases} 4x + 2y = 11 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & \vdots & 11 \\ -2 & 3 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \rightarrow 2F_2 + F_1]{} \begin{pmatrix} 4 & 2 & \vdots & 11 \\ 0 & 10 & \vdots & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \rightarrow \frac{1}{10}F_2]{} \begin{pmatrix} 4 & 2 & \vdots & 11 \\ 0 & 1 & \vdots & 2'1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & \vdots & 6'8 \\ 0 & 1 & \vdots & 2'1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{4}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1'7 \\ 0 & 1 & \vdots & 2'1 \end{pmatrix} \rightarrow S': \begin{cases} x = 1'7 \\ y = 2'1 \end{cases}$$

La única solución de $\boldsymbol{S}$ *es* $(1'7\ ,\ 2'1)$

Nota: El método de Gauss-Jordan consiste en aplicar transformaciones hasta conseguir la matriz unidad.

Resumen del capítulo 3

La intención principal de este capítulo ha sido la de ofrecer métodos que faciliten las soluciones de sistemas lineales con dos ecuaciones y dos variables compatibles determinados. Para ello:

- *Enunciamos y demostramos la regla de Cramer.*
- *Presentamos algunos ejemplos de su uso.*
- *Definimos las operaciones con ecuaciones y las transformaciones elementales de un sistema.*
- *Presentamos el método de Gauss, ejemplos de uso y cómo combinar el método de Gauss con la regla de Cramer.*
- *Definimos las matrices de números reales, así como algunos de sus casos más importantes y la notación empleada para los elementos de las mismas.*
- *Introdujimos la notación matricial asociada a un sistema de ecuaciones.*
- *Aprovechamos la notación matricial para simplificar el enunciado del teorema de Rouché-Fröbenius y de la regla de Cramer, obteniendo así una forma bastante más cómoda para recordarlos.*

- *Aprovechamos la notación matricial para simplificar el uso del método de Gauss y, mediante un ejemplo, presentamos la mejora del mismo denominada método de Gauss-Jordan.*

Puede observarse que hemos obviado, tanto en los resultados teóricos como en los ejemplos, la resolución de sistemas lineales 2x2 compatibles indeterminados. Se decidió así para poder centrarnos en los métodos actuando sobre los casos más sencillos y porque he creído oportuno presentar la resolución de éstos después de la resolución de sistemas con 2 ecuaciones y 3 variables, por entender que facilitan comprender la abstracción que supone ocuparse de describir las soluciones de un sistema cuando su número es infinito. De estos dos casos, así como de la discusión y resolución de sistemas 3x2 nos ocuparemos en el capítulo 4. Antes de ello, como no podía ser de otra forma, se proponen unos ejercicios de recapitulación.

Ejercicios propuestos

Discuta y resuelva usando la regla de Cramer (cuando sean compatibles determinados) los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} -8x - 11y = 5 \\ -3x + 8y = -9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -8x + 7y = 7 \\ 7x + 3y = -10 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 6x - 3y = -7 \\ -4x + -1y = -2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 7x - 3y = 3 \\ -10x + 4y = -2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 7x - 3y = 3 \\ -10x + 4y = -2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} -2x + 6y = -7 \\ x + y = 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 5x - 8y = 5 \\ -10x - 2y = -2 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x + 9y = 8 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$
9. $\begin{cases} -11x + 4y = -7 \\ x = -5 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 2x - 10y = -2 \\ -9x - 2y = -3 \end{cases}$

Discuta y resuelva usando el método de Gauss-Jordan en forma matricial (cuando sean compatibles determinados) los siguientes sistemas:

11. $\begin{cases} -x + 4y = -2 \\ -9y = 7 \end{cases}$
12. $\begin{cases} -5x - 11y = 8 \\ -5x - 5y = 9 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 2x - y = -8 \\ 7x = -5 \end{cases}$
14. $\begin{cases} 4x - 2y = -8 \\ 4x - 11y = -6 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 5x + 2y = -8 \\ -5x - 10y = -3 \end{cases}$
16. $\begin{cases} -7x - 11y = -7 \\ -9x - 8y = -2 \end{cases}$
17. $\begin{cases} -7x - y = 0 \\ -3x + 6y = -7 \end{cases}$
18. $\begin{cases} -x - 8y = -4 \\ 8x - 6y = -11 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 4x + 6y = -1 \end{cases}$
20. $\begin{cases} 4x + 9y = 5 \\ 2x + 0y = 8 \end{cases}$

Capítulo 4: Teorema de Rouché-Fröbenius, regla de Cramer y método de Gauss aplicados a la discusión y resolución de sistemas compatibles indeterminados 2x3, 2x2 y 3x2.

Trataremos en este capítulo de relacionar los casos más sencillos de sistemas compatibles indeterminados con los resultados presentados en los capítulos anteriores para sistemas 2x2. Dada la dificultad que introduce la búsqueda y descripción de infinitas soluciones, comenzaremos por actuar sobre algunos ejemplos concretos para, a posteriori, enunciar y demostrar los resultados generales que podemos intuir a la vista de ellos.

Resolución de un sistema compatible indeterminado 2x3

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Observemos que, si tomamos $z = 0$ *el sistema resultante sería* $S_0: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$*, al que, al ser 2x2, podemos aplicar los resultados ya conocidos. Así, siendo* A_0 *su matriz de coeficientes, resulta que* $det(A_0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$*, por lo que el teorema de Rouché-Fröbenius nos permite asegurar que se trata de un sistema compatible determinado, y que su única solución, de acuerdo con la regla de Cramer, será* $\begin{cases} x = \dfrac{det\,(A_{0,x})}{det\,(A_0)} \\ y = \dfrac{det\,(A_{0,y})}{det\,(A_0)} \end{cases}$*, donde* $A_{0,x}$*,* $A_{0,y}$ *son el resultado de sustituir en la matriz de coeficientes la primera y segunda columna respectivamente por la columna de términos independientes. Como* $det(A_{0,x}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$ *;* $det(A_{0,y}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$*, podemos concluir:*

La única solución de $S_0: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ *es* $\begin{cases} x = \frac{5}{5} = 1 \\ y = \frac{5}{5} = 1 \end{cases}$

¿Tiene esto alguna relación con las soluciones del sistema S*? Evidentemente sí, ya que*

$$(1,1)\ \boldsymbol{es\ solución\ de}\ S_0 \Leftrightarrow (1,1,0)\ \boldsymbol{es\ solución\ de}\ S$$

En particular, nos permite asegurar que S *es compatible, ya que hemos encontrado una solución del mismo. La pregunta natural para cualquier matemático sería: ¿Ocurrirá lo mismo para otros valores de* z*?*

Para mayor claridad, consideremos ahora $\boldsymbol{z=1}$ *que dará lugar al sistema* $\boldsymbol{S_1}:\begin{cases}\boldsymbol{2x-y=0}\\ \boldsymbol{x+2y=4}\end{cases}$

Puesto que su matriz de coeficientes es la misma que la de $\boldsymbol{S_0}$ *, también será compatible determinado y su única solución vendrá dada por* $\begin{cases}\boldsymbol{x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}}{5}=\frac{4}{5}}\\ \boldsymbol{y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}}{5}=\frac{8}{5}}\end{cases}$ *, por lo que* $\boldsymbol{\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5},1\right)}$ *es solución de* $\boldsymbol{S}$ *.*

En general, si utilizamos el mismo razonamiento para cada valor de $\boldsymbol{z}$*, puesto que la matriz de coeficientes del sistema que resulta al sustituir dicho valor en el sistema de ecuaciones será siempre la misma, podremos asegurar, por el teorema de Rouché-Fröbenius, que dicho sistema es compatible determinado, lo que nos lleva a concluir que* $\boldsymbol{S}$ *tiene una solución para cada valor de* $\boldsymbol{z}$ *, luego es compatible indeterminado (tiene tantas soluciones como números reales existen, lo que geométricamente se corresponde con una recta del espacio tridimensional). Disponemos además de un método para ir calculando sus soluciones, sin más que ir obteniendo las soluciones de los sistemas que vayan resultando al ir dando valores a* $\boldsymbol{z}$ *, y deducir de esas soluciones las de* $\boldsymbol{S}$*. No obstante, es evidente que no podemos repetir el procedimiento las infinitas veces necesarias para obtener todas las soluciones. Evitaremos esta dificultad simbolizando el proceso de forma abstracta como sigue:*

Supongamos que ya hemos elegido para $\boldsymbol{z}$ *un valor real cualquiera. Llamemos* $\boldsymbol{\lambda}$ *a dicho valor.*

(Lo anterior suele indicarse: Sea $\boldsymbol{z=\lambda}\in\mathbb{R}$ *cualquiera).*

Consideremos el sistema $\boldsymbol{S_\lambda}$ *que resulta de sustituir en* $\boldsymbol{S}$ *el valor elegido, esto es:*

$$\boldsymbol{S_\lambda}:\begin{cases}\boldsymbol{2x-y=1-\lambda}\\ \boldsymbol{x+2y=3+\lambda}\end{cases}$$

Sean $\boldsymbol{A_\lambda}$ *la matriz de coeficientes de dicho sistema y* $\boldsymbol{A_{\lambda,x}},\boldsymbol{A_{\lambda,y}}$ *las matrices que resultan de sustituir en ella la 1ª y 2ª columna respectivamente por la columna de términos independientes.*

Como $\boldsymbol{det(A_\lambda)=2\cdot 2-(-1)\cdot 1=4+1=5\neq 0},\forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$ *, el teorema de Rouché-Fröbenius nos permite asegurar que* $\boldsymbol{S_\lambda}$ *es compatible determinado* $\forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$ *y su única solución, de acuerdo con la regla de Cramer, será* $\begin{cases}\boldsymbol{x=\frac{det\,(A_{\lambda,x})}{det\,(A_\lambda)}}\\ \boldsymbol{y=\frac{det\,(A_{\lambda,y})}{det\,(A_\lambda)}}\end{cases}$

Como $det(A_{\lambda,x})=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 3+\lambda & 2\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot 2-(-1)\cdot(3+\lambda)=2-2\lambda+3+\lambda=5-\lambda$

Y $det(A_{\lambda,y}) = \begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1 & 3+\lambda \end{vmatrix} = 2\cdot(3+\lambda)-(1-\lambda)\cdot 1 = 6+2\lambda-1+\lambda = 5+3\lambda$

$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \boldsymbol{S_\lambda}$ *tiene por única solución* $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \frac{5-\lambda}{5} \\ \boldsymbol{y} = \frac{5+3\lambda}{5} \end{cases}$ *,lo que resulta equivalente a decir que:*

Las soluciones de S son todas las ternas de la forma

$$\left(\frac{5-\lambda}{5}, \frac{5+3\lambda}{5}, \boldsymbol{\lambda}\right) \boldsymbol{con\ \lambda \in \mathbb{R}\ cualquiera} \quad \blacksquare$$

Geométricamente, las soluciones forman una recta del espacio tridimensional. Exactamente el conjunto de soluciones del sistema es la recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{5-\lambda}}{\boldsymbol{5}} \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{5+3\lambda}}{\boldsymbol{5}} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{cases} \quad \boldsymbol{con\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ahora la siguiente pregunta que se formula un matemático. Al llegar a este punto nos interesaría saber a qué otros sistemas podremos aplicar este mismo razonamiento. Para empezar, observemos que hemos podido aplicar el método porque el determinante de la matriz de coeficientes de $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *era no nulo, por lo que podemos concluir:*

Dado $\boldsymbol{S}: \begin{cases} \boldsymbol{ax+by+cz=d} \\ \boldsymbol{ex+fy+gz=h} \end{cases}$*,si* $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{vmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ *el sistema es compatible indeterminado.*

De forma análoga, si la matriz de coeficientes de $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *tiene determinante nulo, pero el determinante de la matriz de coeficientes de* $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{z}$ *es no nulo, podremos utilizar el mismo razonamiento dando valores a* $\boldsymbol{y}$*. Lo vemos en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 16 (Otro sistema 2x3 compatible indeterminado)

Resuelva $\boldsymbol{S}: \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{x+y-z=1} \end{cases}$

Resolución

Tomando las dos primeras columnas de la matriz de coeficientes: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$

Tomando la primera y la tercera: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{-1-1=-2 \neq 0}$ *de donde se deduce por el teorema de Rouché-Fröbenius que, tomando* $\boldsymbol{y=\lambda} \in \mathbb{R}$ *cualquiera, el sistema* $\boldsymbol{S_\lambda}: \begin{cases} \boldsymbol{x+z=3-\lambda} \\ \boldsymbol{x-z=1-\lambda} \end{cases}$ *es compatible determinado, y podemos utilizar la regla de Cramer para encontrar su única solución, que será:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{3-\lambda} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}}{\mathbf{-2}} = \dfrac{\boldsymbol{\lambda-3+\lambda-1}}{\mathbf{-2}} = \dfrac{\boldsymbol{2\lambda-4}}{\mathbf{-2}} \\ \boldsymbol{z} = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3-\lambda} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1-\lambda} \end{vmatrix}}{\mathbf{-2}} = \dfrac{\boldsymbol{1-\lambda+\lambda-3}}{\mathbf{-2}} = \dfrac{\mathbf{-2}}{\mathbf{-2}} = \mathbf{1} \end{cases}$$

De donde se deduce que $\boldsymbol{S}$ *es compatible indeterminado y sus soluciones son todas las ternas de la forma* $\left(\frac{\boldsymbol{2\lambda-4}}{\mathbf{-2}}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{1}\right)$ *con* $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ ■

Geométricamente, el conjunto de soluciones es una recta del espacio tridimensional.

Obsérvese que podríamos haber razonado directamente dando valores a $\boldsymbol{z}$ *como sigue:*

Sea $\boldsymbol{z=\mu} \in \mathbb{R}$ *cualquiera y consideremos los sistemas 2x2* $\boldsymbol{S_\mu}: \begin{cases} \boldsymbol{x+y=3-\mu} \\ \boldsymbol{x+y=1+\mu} \end{cases}$

Como ya comprobamos, su matriz de coeficientes tiene determinante nulo para todos los valores del parámetro, por lo que cada uno de los sistemas anteriores será, de acuerdo con el teorema de Rouché-Fröbenius, incompatible o compatible indeterminado según que el vector formado por los términos independientes dependa linealmente de $(\mathbf{1},\mathbf{1})$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{3-\mu} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{1+\mu} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{1+\mu}) - (\boldsymbol{3-\mu}) = \boldsymbol{2\mu-2}$$

Luego el sistema sólo será compatible (indeterminado) si $\boldsymbol{2\mu-2=0}$*, esto es, si* $\boldsymbol{\mu=1}$

¿Qué nos dice lo anterior de las soluciones de $\boldsymbol{S}$*? Que todas sus soluciones tienen en común que el valor de la tercera variable es 1. Sustituyendo obtenemos:* $\boldsymbol{S_1}: \begin{cases} \boldsymbol{x+y=2} \\ \boldsymbol{x+y=2} \end{cases}$ *cuyas dos igualdades serán verdaderas sin más que serlo la primera, ya que son la misma. Así, sus soluciones serán todas las parejas de números reales que sumen 2. Simbólicamente, si tomamos* $\boldsymbol{y=\rho} \in \mathbb{R}$ *cualquiera,* $\begin{cases} \boldsymbol{x=2-\rho} \\ \boldsymbol{y=\rho} \end{cases}$ *será solución de* $\boldsymbol{S_1}$ *,lo que nos permite concluir que:*

***S** es compatible indeterminado y sus soluciones son todas las ternas de la forma*

$(\mathbf{2}-\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\mathbf{1})$ *con* $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}$ ∎

Geométricamente, el conjunto de soluciones es una recta del espacio tridimensional.

Pudiera parecer que las soluciones obtenidas siguiendo los dos razonamientos empleados no son las mismas, pero basta simplificar la fracción obtenida con el primer método para comprobar que realmente coinciden.

Nótese, además, que con el segundo razonamiento hemos mostrado cómo resolver un sistema compatible indeterminado 2x2.

Siguiente pregunta que nos formulamos: ¿Qué ocurre si también el segundo determinante resulta ser nulo? Podríamos pensar que quizá el determinante formado por las columnas 2ª y 3ª sea distinto de cero, pero esto no es posible, ya que habríamos comprobado que los vectores correspondientes a las columnas 1ª y 2ª son linealmente dependientes (por ser su determinante nulo) y asimismo los vectores correspondientes a la 1ª y 3ª columnas, por lo que seguro también serán linealmente dependientes los vectores correspondientes a las columnas 2ª y 3ª, luego su determinante también será nulo. Así, tal y como ya razonáramos para sistemas 2x2, el sistema tendrá infinitas soluciones si la 4ª columna también resulta ser linealmente dependiente de la 1ª, y no tendrá ninguna solución si no lo es.

La reflexión anterior nos permite enunciar:

Teorema 15 (Teorema de Rouché-Fröbenius para sistemas 2x3)

Sea $S:\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=e \end{cases}$. *Sean* $A_{i,j}$ *las matrices formadas por las columnas* i *y* j *de coeficientes del sistema. Se verifican:*

1. $\left\{\begin{matrix} det\ (A_{1,2}) \neq 0 \\ \text{ó} \\ det\ (A_{1,3}) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ *S es compatible indeterminado y su conjunto de soluciones es una recta del espacio tridimensional.*
2. $det(A_{1,2})=0$ *y* $det(A_{1,3})=0$ *y* $det(A_{1,4})=0 \ \Longrightarrow S$ *es compatible indeterminado y su conjunto de soluciones es un plano del espacio tridimensional.*
3. *En otro caso el sistema es incompatible.*

Se ofrecerá algún ejemplo del segundo caso tras estudiar los sistemas compatibles indeterminados 2x2, pero antes nos ocuparemos de introducir una nueva definición, ya que no parece razonable que vayamos enunciando un teorema diferente para cada número de ecuaciones y de variables que pudiera tener un sistema. El rango de una matriz viene a resolver este inconveniente.

Definición 13 (Rango de una matriz)

Dada una matriz $\boldsymbol{A}$ se define su rango como el mayor número de columnas linealmente independientes de la misma. Lo denotaremos por $\boldsymbol{rg(A)}$ (también por $\boldsymbol{rango(A)}, \boldsymbol{ran(A)}, \boldsymbol{r(A)}$)

Ejemplo 17 (Cálculo del rango de una matriz)

Calcule el rango de las siguientes matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

Resolución

1. $rg(A) = 1$ *ya que* $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ *luego las dos columnas son linealmente dependientes.*
2. $rg(B) = 2$ *ya que, tomando las dos primeras columnas de B,* $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7 \neq 0$ *luego las dos primeras columnas son linealmente independientes, y sabemos que tres vectores del plano son siempre linealmente dependientes.*
3. $rg(C) = 1$ *ya que, como es fácil comprobar, las tres columnas son proporcionales, y por lo tanto linealmente dependientes si las tomamos de dos en dos.*

Proposición 16 (Relación entre rango y determinantes)

El rango de una matriz coincide con el mayor orden (número de filas y columnas) de los determinantes no nulos de entre las submatrices de la matriz.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio al lector.

Con la definición anterior sería posible enunciar y demostrar ya de forma conjunta el teorema de Rouché-Fröbenius para sistemas 2x2 y 2x3. No obstante, como el enunciado es válido para sistemas de ecuaciones con cualquier número de ecuaciones y de variables, enunciaremos ya el teorema general, a fin de no ser excesivamente redundantes.

Teorema 16 (Teorema de Rouché-Fröbenius)

Sea S un sistema de ecuaciones lineales cualquiera. Sea A su matriz de coeficientes y B su matriz ampliada. Se verifican:

1. *Si* $rg(A) = rg(B) = n^{\underline{o}}\ de\ variables$ *el sistema es compatible determinado.*
2. *Si* $rg(A) = rg(B) < n^{\underline{o}}\ de\ variables$ *el sistema es compatible indeterminado.*
3. $rg(A) < rg(B)$ *el sistema es incompatible.*

Además, si el sistema es compatible, el conjunto de soluciones tiene dimensión igual al nº de variables menos el rango de A.

Demostración

Basta pensar en los resultados ya obtenidos sobre dependencia lineal, ya que el sistema de ecuaciones tendrá tantas soluciones como combinaciones lineales se puedan conseguir con los vectores formados por los coeficientes que coincidan con el vector formado por los términos independientes.

El resto del capítulo se abordará de forma eminentemente práctica.

Ejemplo 18 (Resolución de un sistema compatible indeterminado 2x2)

Discuta y resuelva $S\colon\begin{cases} x+3y=8 \\ 3x+9y=24 \end{cases}$

Resolución

Sean A, B *la matriz de coeficientes y ampliada del sistema*

$det(A) = 9-9=0 \Longrightarrow rg(A)=1$ *(ya que la matriz no es nula, luego su rango es mayor o igual que 1)*

Para calcular el rango de la matriz ampliada basta comprobar si la 1ª y 3ª columnas son linealmente dependientes o independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 24 \end{vmatrix} = 24-24=0 \Longrightarrow rg(B)=1$$

Así, $rg(A)=rg(B)=1<2=nº\ de\ variables$ *. El teorema de Rouché nos permite asegurar que el sistema es compatible indeterminado. Aplicando el método de Gauss:*

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow[F2\to F2-3\cdot F1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x+3y=8 \\ 0=0 \end{cases}$ *es equivalente a* S.

Es evidente que serán soluciones del sistema todas aquellas parejas de números reales que verifiquen la primera ecuación. Así, tomando $y=\lambda\in\mathbb{R}$, *obtendremos* $x=8-3\lambda$, *de donde las soluciones de S serán todos los pares de la forma* $(8-3\lambda,\lambda)$ *con* $\lambda\in\mathbb{R}$ ■

El conjunto de soluciones tiene dimensión 1: es una recta del plano.

Ejemplo 19 (Un sistema lineal 2x3 cuyo conjunto de soluciones es todo un plano del espacio tridimensional)

Discuta y resuelva: $\boldsymbol{S}\colon\begin{cases} \boldsymbol{2x+3y-5z=10} \\ \boldsymbol{-6x-9y+15z=-30} \end{cases}$

Resolución

Nota: emplearemos en este ejemplo un algoritmo que resulta útil en general, y que describimos a continuación.

- *Usamos el método de Gauss para conseguir un sistema de ecuaciones lineales equivalente al dado, pero más sencillo. Lo llamaremos* $\boldsymbol{S^*}$.
- *A continuación, utilizamos el teorema de Rouché-Fröbenius para determinar si* $\boldsymbol{S^*}$ *, y con esto* $\boldsymbol{S}$ *, es compatible o incompatible.*
- *Finalmente, aplicamos la regla de Cramer (o cualquier otro método conocido) para resolver el sistema* $\boldsymbol{S^*}$ *, que tiene las mismas soluciones que* $\boldsymbol{S}$ *, siempre que se nos pida resolverlo y no sólo discutirlo y además sea compatible.*

Aplicamos ahora este algoritmo al caso particular de este ejemplo:

- *Usamos el método de Gauss para conseguir un sistema equivalente al dado pero más sencillo:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 10 \\ -6 & -9 & 15 & -30 \end{array}\right) \xrightarrow[F2 \to F2+3F1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow S^*: \begin{cases} 2x+3y-5z=10 \\ 0=0 \end{cases}$$ *es equivalente al sistema dado.*

- *Discutimos* $\boldsymbol{S^*}$ *por medio del teorema de Rouché-Fröbenius.*

Denotemos por A la matriz de coeficientes del sistema y por B su matriz ampliada.

$rg(A)=1$ *ya que todos los determinantes de orden 2 tienen la segunda fila nula. (Es trivial comprobar que cualquier determinante de orden 2 con una fila nula es nulo. De hecho este resultado es válido para determinantes de cualquier dimensión).*

$rg(B)=1$ *por la misma razón.*

Así, $rg(A)=rg(B)=1<3=n^{\underline{o}}\ de\ variables$*, por lo que el teorema de Rouché nos permite asegurar que el sistema es compatible indeterminado. Además el conjunto de soluciones tiene dimensión 3-1=2, esto es, se trata de un plano del espacio tridimensional.*

- *Resolvamos el sistema equivalente.*

En este caso basta observar que las soluciones del sistema serán las ternas que hagan verdadera la primera igualdad (la segunda es una identidad), esto es, las ternas que verifiquen que el doble de la primera coordenada más el triple de la segunda menos cinco veces la tercera sea igual a diez. Así, una vez elegido un valor para $\boldsymbol{x}$ *, sea éste* $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$ *cualquiera, y otro valor cualquiera para* $\boldsymbol{y}$ *, sea éste* $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}$ *cualquiera, bastará despejar en la primera ecuación y tomar* $\boldsymbol{z}=\frac{\mathbf{10}-\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{3}\boldsymbol{\mu}}{-\mathbf{5}}$ *para obtener la solución del sistema* $\left(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\frac{\mathbf{10}-\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{3}\boldsymbol{\mu}}{-\mathbf{5}}\right)$.

Se deduce de lo anterior que son soluciones de $\boldsymbol{S}$ todas las ternas de la forma $\left(\lambda,\mu,\frac{10-2\lambda-3\mu}{-5}\right)$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ***cualesquiera***. ■

Geométricamente, el conjunto de soluciones es el plano de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=\dfrac{10-2\lambda-3\mu}{-5} \end{cases} \quad \text{con } \lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ cualesquiera.}$$

Si bien el capítulo estaba destinado al estudio de sistemas indeterminados, se cree conveniente incluir algún ejemplo de sistemas incompatibles, para ver qué ocurre al aplicar el algoritmo anterior a tales sistemas.

Ejemplo 20 (Un sistema 2x3 incompatible)

Discuta y resuelva el sistema $\boldsymbol{S}:\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ -6x+2y-2z=-4 \end{cases}$

Resolución

- *Aplicamos el método de Gauss para conseguir un sistema de ecuaciones equivalente más sencillo.*

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F2\to F2+2F3]{} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow S^*:\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 0=4 \end{cases}$ *es equivalente al sistema dado y es incompatible por ser la segunda igualdad siempre falsa.*

Podemos entonces concluir que $\boldsymbol{S}$ *es un sistema incompatible. Su conjunto de soluciones es el conjunto vacío. (El conjunto vacío se denota por el siguiente símbolo: ∅).* ■

Pasamos finalmente a ocuparnos de sistemas 3x2. Veremos que no necesitamos de muchos resultados teóricos adicionales para ello ocupándonos directamente del caso general.

Discusión y resolución de sistemas lineales 3x2. Caso general.

Sea $\boldsymbol{S}:\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \\ gx+hy=i \end{cases}$ *un sistema de ecuaciones lineales 3x2 cualquiera.*

Nótese que nos encontramos aquí con 3 vectores de dimensión 3 (las columnas del sistema).

Puede ocurrir:

1. *Que los vectores de coeficientes* $(a,d,g),(b,e,h)$ *sean linealmente dependientes (lo que equivaldría a decir que el rango de la matriz de coeficientes es 1). En este caso, las combinaciones*

lineales de estos dos vectores sólo podrán dar lugar a vectores con su misma dirección, de donde se deduce que:

   a. *si el vector de términos independientes no depende linealmente de ellos (lo que equivale a decir que el rango de la matriz ampliada sea 2) el sistema no tendrá ninguna solución (será incompatible)*
   b. *mientras que si depende linealmente de ellos el sistema tendrá infinitas soluciones (será compatible indeterminado)*

2. *Que los vectores de coeficientes* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{g}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{h})$ *sean linealmente independientes (lo que equivaldría a decir que el rango de la matriz de coeficientes es 2). En este caso, las combinaciones lineales de estos dos vectores podrán dar lugar a todos los vectores del plano del que ellos son base. Podrá ocurrir que:*
   a. *El vector de términos independientes dependa linealmente de ellos (lo que equivale a decir que en el conjunto formado por los tres, el mayor conjunto de vectores linealmente independientes contiene a dos de ellos, esto es, el rango de la matriz ampliada también es 2). En este caso el sistema tendrá una única solución (compatible determinado). Obsérvese que se trata de un sistema en el que los dos primeros vectores son base de un plano y que el tercer vector pertenece a dicho plano, lo que da lugar, como en el caso de sistemas 2x2, a una única combinación lineal de los dos primeros que coincida con el tercero.*
   b. *El vector de términos independientes no depende linealmente de ellos (esto es, el rango de la matriz ampliada es 3). En este caso los dos primeros vectores generan un plano al que no pertenece el tercero, por lo que el sistema será incompatible.*

Debe observarse de toda la argumentación anterior ofrece resultados coincidentes (y sirve de demostración algo informal) con el ya enunciado en su forma definitiva teorema de Rouché-Fröbenius.

Faltará ahora comprobar cómo conseguimos determinar con facilidad la dependencia o independencia lineal de vectores con tres coordenadas. Dicho de otra forma, cómo determinar en la práctica el rango de matrices con más de dos filas.

También habrá que ocuparse de obtener las soluciones de estos sistemas cuando sean compatibles.

Tratamos lo anterior con algunos ejemplos.

Ejemplo 21 (Un sistema lineal 3x2)

Discuta y resuelva $\boldsymbol{S}: \begin{cases} \boldsymbol{2x - y = 4} \\ \boldsymbol{x + 3y = 2} \\ \boldsymbol{5x + 2y = 0} \end{cases}$

Resolución