Examen de matemáticas II

Álgebra: Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss.
Álgebra de matrices.

Nombre y apellidos:
Fecha:

---

1) Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a. ¿Todo sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas es compatible indeterminado?

Falso. Contrajemplo:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x+y+z+t=2 \end{cases}$$

verifica las condiciones propuestas y es claramente incompatible, ya que las dos primeras ecuaciones no pueden cumplirse de forma simultánea. (c.q.d.)

b. ¿Un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas puede ser incompatible?

Verdadero. Ejemplo:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

verifica las condiciones propuestas y es incompatible, ya que las tres primeras ecuaciones no pueden ser simultáneamente verdaderas. (c.q.d.)

c. ¿Todo sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas es compatible determinado?

Falso. Contraejemplo:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x+y+z+t=3 \end{cases}$$

tiene 4 ecuaciones y cuatro incógnitas y, sin embargo, es incompatible por la misma razón que los apartados anteriores. (c.q.d.)

d. ¿Un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas puede ser incompatible?

Falso.

Todo sistema homogéneo tiene términos independientes nulos, por lo que sustituyendo todas las incógnitas por 0 se consiguen siempre igualdades verdaderas, o lo que es lo mismo, $(0,0,0,0)$ es siempre una solución de todo sistema homogéneo con cuatro incógnitas, por lo que siempre será compatible.

Simbólicamente, la justificación anterior puede expresarse como sigue:

Sea S cualquier sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Por definición, S será de la forma

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt=0 \\ ex+fy+gz+ht=0 \\ ix+jy+kz+lt=0 \\ mx+ny+ñz+pt=0 \end{cases}$$ para ciertos valores $a,b,...,p \in \Re$.

En cualquier caso,

$$\begin{cases} a0+b0+c0+d0=0 \\ e0+f0+g0+h0=0 \\ i0+j0+k0+l0=0 \\ m0+n0+ñ0+p0=0 \end{cases}$$ serán cuatro igualdades ciertas para cualesquiera valores de $a,b,...,p \in \Re$ ya que todos los productos serán nulos, luego $(0,0,0,0)$ es solución de cualquier sistema S homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, lo que equivale a decir que

todo sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas es compatible determinado pues tiene al menos una solución. (c.q.d.)

2) Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de Gauss e interpreta geométricamente el conjunto de soluciones.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Resolución

El método de Gauss se basa en el siguiente resultado:

> Teorema
>
> *Si en un sistema de ecuaciones lineales*
>
> 1. Intercambiamos dos ecuaciones, o
> 2. Multiplicamos cualquiera de sus ecuaciones por cualquier número real distinto de cero, o
> 3. *Sumamos a cualquiera de sus ecuaciones una combinación lineal de las restantes,*
>
> *se obtiene otro sistema de ecuaciones equivalente al primero.*

Se trata entonces de aplicar el resultado anterior repetidamente para ir consiguiendo una sucesión de sistemas, todos equivalentes al primero, cada vez más sencillos.

Dado que las tres operaciones admitidas afectan sólo a los coeficientes y no a las variables, podemos simplificar el procedimiento operando sobre la matriz ampliada del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F3} \\ \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2-3F1} \\ \xrightarrow{F3-5F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2} \\ \xrightarrow{F3-2F2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2} \\ \xrightarrow{F3-2F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Se obtiene así el sistema de ecuaciones equivalente al dado:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-2z=1 \\ 2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-2z=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+\frac{1}{2}=0 \\ -y-2\cdot\frac{1}{2}=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-\frac{1}{2} \\ -y-1=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-\frac{1}{2} \\ y=-2 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+(-2)=-\frac{1}{2} \\ y=-2 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}+2 \\ y=-2 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-2 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su única solución es $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-2,\frac{1}{2}\right)$.

Interpretación geométrica

Cada una de las tres ecuaciones del sistema representa un plano del espacio tridimensional que tienen un único punto en común (el que corresponde a la solución del sistema).
El conjunto de soluciones está, por tanto, formado por un único punto del espacio tridimensional.

Observación

Podíamos haber continuado aplicando transformaciones hasta convertir la matriz de coeficientes en la matriz identidad. Es lo que se conoce como el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F3} \\ \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2-3F1} \\ \xrightarrow{F3-5F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2} \\ \xrightarrow{F3-2F2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2} \\ \xrightarrow{F3-2F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{2F1-F3} \\ \xrightarrow{F2+F3} \\ \xrightarrow{F3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F1+2F2} \\ \xrightarrow{F2} \\ \xrightarrow{F3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F1+2F2} \\ \xrightarrow{F2} \\ \xrightarrow{F3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{2}F1} \\ \xrightarrow{-F2} \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}F3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-2 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

3) Calcula el rango de $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$**.**

Resolución

Se define el rango de una matriz como el número de filas (o columnas) linealmente independientes de la misma.

Se deduce de lo anterior que $rango(M)\leq 3$ ya que la matriz sólo tiene 3 filas.

Sabemos también $rango(M)\geq 1$ ya que no es la matriz nula.

Disponemos además del siguiente resultado teórico:

> <u>Teorema</u>
>
> *Si A es una matriz de orden 3x3, entonces:*
>
> 1. $rango(A)=3 \Leftrightarrow$ *el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A tiene solución única* $(0,0,0)$
> 2. $rango(A)=2 \Leftrightarrow$ *el conjunto de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A es una recta.*
> 3. $rango(A)=1 \Leftrightarrow$ *el conjunto de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A es un plano.*

Por lo tanto, podemos calcular el rango de M resolviendo el sistema de matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 3 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)$ usando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 3 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{F1}\\ \xrightarrow{F2-2F1}\\ \xrightarrow{F3-3F1}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & -4 & 2 & 0\end{array}\right)$$

Escribiendo el sistema asociado:

$$\begin{cases}x+2y-3z=0\\ 5z=0\\ -4y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-3\cdot 0=0\\ z=0\\ -4y+2\cdot 0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2\cdot 0=0\\ z=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ z=0\\ y=0\end{cases}.$$

De acuerdo con el Teorema anterior, puesto que el sistema tiene solución única:

$\boxed{rango(M) = 3}$. (c.q.d.)

<u>Observación</u>

Al resolver un sistema de ecuaciones homogéneo por el método de Gauss la columna de los términos independientes siempre será nula, por lo que podíamos haber ahorrado trabajo aplicando transformaciones válidas directamente a la matriz *M* sin la columna de ceros.

4) Siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, demuestra que la matriz** $I+A+A^2$ **es la matriz inversa de** $I-A$**.**

Resolución

Por definición de inversa de una matriz,

$I+A+A^2$ será la matriz inversa de $I-A$
si y sólo si
$$(I+A+A^2)(I-A)=I$$

Efectuando los cálculos:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I+A+A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I+A+A^2)(I-A)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & -2+2 & 1-2+1 \\ 0 & 1\cdot 1 & -1+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

(c.q.d.)

5) Encuentra la matriz X que hace verdadera la igualdad $A \cdot B^t \cdot X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Resolución

Efectuando los cálculos:

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-2C = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la igualdad buscada:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para que sea posible el producto X debe tener 2 filas siendo el resultado del producto una matriz de orden 2 x n. Para que sea posible la igualdad debe entonces ser n=2. Podemos escribir entonces:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x-6z & -y-6t \\ -5x-2z & -5y-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x-6z=-2 \\ -5x-2z=0 \end{cases} \\ \begin{cases} -y-6t=-8 \\ -5y-2t=2 \end{cases} \end{cases}$$

Como los dos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, podemos resolverlos de forma conjunta:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -6 & -2 & -8 \\ -5 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{F2-5F1} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & 28 & 10 & 42 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F1} \\ \xrightarrow{\frac{1}{28}F2} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F1+6F2} \\ \xrightarrow{F2} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-F1} \\ \xrightarrow{F2} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Teniendo en cuenta que la 1ª columna de la matriz de términos independientes se correspondía con el sistema de ecuaciones con variables x, z y la 2ª columna con el sistema de variables y, t, podemos escribir los sistemas equivalentes obtenidos, que son:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ z = \frac{5}{14} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \text{ de donde } \boxed{X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}} \blacksquare$$

Observación

Conviene hacer notar que los dos sistemas conjuntos que hemos resuelto en forma matricial resultan de unir las dos matrices de

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es por esto que podemos ahorrarnos el producto de matrices y el planteamiento de los dos sistemas de ecuaciones. No obstante, se debe tener mucho cuidado con la asignación final de los resultados obtenidos, pues es fácil situarlos mal al sustituir en la matriz X.

Para evitar confusiones es mejor asignar las variables en X por columnas: $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ en lugar de por filas, ya que de este modo, tras aplicar el método de Gauss-Jordan, la matriz conseguida a la derecha coincidirá exactamente con la matriz X buscada, ya que así dispuestas las variables, el primer sistema de ecuaciones tendría variables x , y (encontrando sus soluciones en la primera columna de coeficientes) y el segundo sistema variables z , t (encontrando sus soluciones en la segunda columna de coeficientes).

Otra forma de proceder sería calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ a la que llamaremos M y con ella:

$M \cdot \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = M \cdot \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y por ser M la inversa el primer producto será la matriz identidad y el primer miembro de la ecuación será simplemente X. Así bastará calcular el producto del segundo miembro y habremos encontrado la matriz buscada, que existirá si existe la inversa de la primera matriz.