22 de Octubre de 2010.

Nombre y apellidos:

Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

Ejercicio 1

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}.$$

a) Resuélvalo utilizando el método de Gauss. **(70%)**

b) Interprete geométricamente su conjunto de soluciones. **(10%)**

c) Compruebe las soluciones obtenidas. **(20%)**

Resolución del ejercicio 1

a) Descripción del procedimiento que vamos a emplear:

- Llamaremos S al sistema de ecuaciones.
- Usaremos el método de Gauss para conseguir un sistema de ecuaciones equivalente a S pero más sencillo, convirtiendo la matriz asociada a S en una matriz triangular por medio de transformaciones válidas.
- Llamaremos S' a este nuevo sistema de ecuaciones.
- Resolveremos S' y tendremos las soluciones de S, por ser ambos equivalentes.

Procedemos a resolver S:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (\text{---->}F2) \\ (\text{---->}F1) \\ (\text{---->}F3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (\text{---->}F1) \\ (\text{---->}F2 - 3F1) \\ (\text{---->}F3) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{---->}F1) \\ (\text{---->}F2 - 3F1) \\ (\text{---->}F3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (\text{---->}F1) \\ (\text{---->}F2) \\ (\text{---->}F3+F2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escribimos el sistema de ecuaciones S' resultante:

$\begin{cases} x - z = 1 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Como la tercera ecuación es una identidad, podemos eliminarla del sistema, obteniendo otro sistema equivalente con sólo 2 ecuaciones:

$S'' : \begin{cases} x - z = 1 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$ Tomando **y** como parámetro (despejando **z** en la 2ª ecuación):

$\begin{cases} x - z = 1 \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ z = 2y \end{cases}$, de donde se deduce que las soluciones de S'' (y por lo tanto de S' y de S por ser todos equivalentes) son todas las ternas de la forma (tomando $y = \lambda \in \Re$):

Soluciones: $(1 + 2\lambda\,,\, \lambda\,,\, 2\lambda) \quad \forall \lambda \in \Re$ ■

b) Geométricamente, el conjunto de soluciones de S es una recta del espacio tridimensional. Cada ecuación de S representa un plano del haz de planos que contienen a dicha recta.

c) Para comprobar que las soluciones obtenidas son válidas basta sustituirlas en S y comprobar que las tres igualdades son ciertas:

$$\begin{cases} 3\cdot(1+2\lambda)-2\cdot(\lambda)-2\cdot(2\lambda)=3 \\ (1+2\lambda)-(2\lambda)=1 \\ 2\cdot(\lambda)-(2\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+6\lambda-2\lambda-4\lambda=3 \\ 1+2\lambda-2\lambda=1 \\ 2\lambda-2\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=3 \\ 1=1 \\ 0=0 \end{cases}$$ Son tres identidades y, por lo tanto, las soluciones obtenidas son válidas. ■

Ejercicio 2

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determine las dimensiones de la matriz X para que sean posibles las siguientes operaciones. Justifique con claridad la respuesta.

$X \cdot A - 2B$. **(30%)**

b) Determine X para que se verifique la siguiente igualdad

$X \cdot A - 2B = C^t$. **(70%)**

Resolución del ejercicio 2

a)

- Para que sea posible el producto $X\cdot A$ es necesario que el número de columnas de X coincida con el número de filas de A. Como A tiene 2 filas podemos concluir que X tiene dos columnas, esto es: $X \in \mathrm{M}_{mx2}$.
- Al efectuar el producto obtendremos entonces una matriz $Y = X\cdot A$ que tendrá m filas y dos columnas, por ser respectivamente el número de filas y columnas de X y A.
- Para poder continuar con las operaciones, habrá que poder restarle a Y la matriz $2B$. Para ello es necesario que tengan idéntica dimensión,

esto es debe coincidir tanto el número de filas como de columnas en ambas matrices. Así, será necesario que Y tenga, como $2C$, 2 filas.

- Como el número de filas de Y coincidía con el número de filas de X, podemos concluir que X tiene dimensión 2x2. ■

Observación.

Vamos a resolver esta cuestión teórica simbólicamente, y podremos comprobar en que forma el simbolismo, una vez nos hacemos con él, simplifica notablemente la justificación de los razonamientos empleados.

- Sabemos que $Si \quad X \in \mathrm{M}_{mxn}, A \in \mathrm{M}_{pxq}\ entonces\ (\exists X \cdot A \Leftrightarrow n = p)$
- En nuestro caso $A \in \mathrm{M}_{2x2} \Rightarrow p = 2 \Rightarrow n = 2$.
- Además, en tal caso $X \cdot A \in \mathrm{M}_{mx2}$
- Por último,

$$Si \quad X \cdot A \in \mathrm{M}_{mxn}, 2 \cdot B \in \mathrm{M}_{pxq}\ entonces\ (\exists X \cdot A - 2 \cdot B \Leftrightarrow \begin{cases} m = p \\ \wedge \\ n = q \end{cases})$$

- En nuestro caso, p=q=n=2, de donde la diferencia será posible si y sólo si m=2.
- En conclusión, $X \in \mathrm{M}_{2x2}$ ■

b) Como sabemos, del apartado a), que $X \in \mathrm{M}_{2x2}$, podemos escribir

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Haremos cada cálculo de forma independiente y luego sustituiremos, respetando el orden de prioridad de las operaciones:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 + y \cdot 2 & x \cdot 3 + y \cdot 5 \\ z \cdot 1 + t \cdot 2 & z \cdot 3 + t \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & 3x + 5y \\ z + 2t & 3z + 5t \end{pmatrix}$$

$$2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo obtenemos

$$X \cdot A - 2B = C^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2y & 3x+5y \\ z+2t & 3z+5t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2y & 3x+5y-2 \\ z+2t-2 & 3z+5t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término resultan los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ 3x+5y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-1 \\ 3x+5y=2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} z+2t-2=3 \\ 3z+5t-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+2t=5 \\ 3z+5t=1 \end{cases}$$

Resolviéndolos por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-3F1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} (\text{--->F1+2F2}) \\ (\text{---> -F2}) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Se deduce directamente que $\begin{cases} x=9 \\ y=-5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-3F1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} (\text{--->F1+2F2}) \\ (\text{---> -F2}) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Por lo que $\begin{cases} z=-23 \\ t=14 \end{cases}$. Así pues, la igualdad será cierta si y sólo si

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Ejercicio 3

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule, si es posible, A^{-1} usando el método de Gauss – Jordan. **(40%)**

b) Calcule, si es posible, B^{-1} usando el método de Gauss – Jordan. **(40%)**

c) Compruebe las soluciones que haya sido posible obtener en los apartados anteriores. **(20%)**

Resolución del ejercicio 3

En los dos primeros apartados, se trata de encontrar las matrices A^{-1} , B^{-1} *tales que* $A \cdot A^{-1} = B \cdot B^{-1} = I_3$ siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Observación: ¿Por qué utilizamos el método de Gauss-Jordan para encontrar la matriz inversa de otra dada?

Lo anterior es equivalente a resolver los tres sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas que resultan de plantear $A \cdot A^{-1} = I_3$. Si tomamos

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & t & a \\ y & u & b \\ z & v & c \end{pmatrix}$, la igualdad sería

$\begin{pmatrix} x+3y-z & t+3u-v & a+3b-c \\ x+y+z & t+u+v & a+b+c \\ 3x+3y & 3t+3v & 3a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Así que obtendríamos 3 sistemas de ecuaciones idénticos salvo por el nombre de las variables y por los términos independientes, esto es, escritos en forma matricial, sólo los distinguirían las columnas de los coeficientes:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$ al comparar las primeras columnas y

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right);\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$ al comparar las otras dos.

Como las transformaciones que haríamos sobre las tres matrices para resolver los tres sistemas de ecuaciones serían las mismas, ya que coinciden las matrices de coeficientes, lo que hacemos es escribir los tres sistemas juntos,

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ de tal forma que, si aplicando el método de Gauss-Jordan conseguimos transformar la matriz de coeficientes en la identidad, los elementos de la primera columna de la derecha serán las soluciones del primer sistema de ecuaciones, esto es, los valores de x, y ,z, que recordemos son los valores buscados para la primera columna de A^{-1}. Análogamente, la segunda y tercera columnas obtenidas tras aplicar el método anterior serán la segunda y tercera columnas, respectivamente, de la matriz inversa buscada. ■

a) Después de lo dicho, procedamos sobre la matriz anterior.

$$\underset{\left(A|I_3\right)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \begin{array}{l} \\ (\text{--->F2-F1}) \\ (\text{--->F3-3F1}) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (\text{--->F3+3F2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ (\text{--->F3+3F2}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (\text{--->3F1-F3}) \\ (\text{--->3F2+2F3}) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 9 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (\text{--->6F1+9F2}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\text{--->6F1+9F2}) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & -9 & -9 & 12 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (\text{--->F1:18}) \\ (\text{--->F2:(-6)}) \\ (\text{--->(F3:(-3))}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(I_3 \middle| A^{-1}\right)$$

Por lo tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$

b) Procedemos igual que en el apartado a) con la matriz B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (\text{--->F2-F1}) \\ (\text{--->F3-F1}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) (\text{--->F2-2F3})$$

$$(\text{--->F2-2F3}) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz de coeficientes tiene una fila llena de ceros, por lo tanto, $\nexists B^{-1}$ ■

c) Para comprobar que la matriz inversa calculada en el primer apartado es correcta, basta aplicar la definición, esto es, basta comprobar que $A \cdot A^{-1} = I_3$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2+3/2 & -1/2+3/2-1 & 2/3-3/3+1/3 \\ -1/2+1/2 & -1/2+1/2+1 & 2/3-1/3-1/3 \\ -3/2+3/2 & -3/2+3/2 & 6/3-3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/2 & 2/2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(cqd)*

* como queríamos demostrar.