

## Ejercicios y problemas resueltos: Geometría.

¿Cómo podemos comprobar si un punto pertenece a una recta de la que conocemos dos de sus puntos?

1. Comprueba si el punto  $P=(1,1)$  pertenece a la recta que pasa por los puntos  $A=(2,2)$  y  $B=(3,3)$ .

$P$  pertenece a la recta que pasa por  $A$  y  $B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$  son linealmente dependientes  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = 1$$

En nuestro caso:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (1,1) - (2,2) = (-1,-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,3) - (2,2) = (1,1)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ y la matriz no es nula} \Rightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Podemos entonces concluir que el punto  $P$  pertenece a la recta que pasa por  $A$  y  $B$ . ■

Otros enunciados equivalentes para el mismo problema:

- Comprueba si los puntos  $A, B, P$  están alineados.
- Comprueba si la recta que pasa por  $A$  y  $B$  pasa también por el punto  $P$ .
- Comprueba si los puntos  $A, B, P$  determinan una recta.
- Comprueba si los puntos  $A, B, P$  definen una única dirección.
- Comprueba si los vectores  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$  tienen la misma dirección.
- Comprueba si los vectores  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$  son proporcionales.
- Comprueba si los vectores  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$  son linealmente dependientes.
- Partiendo de  $A$ , ¿es posible alcanzar el punto  $P$  siguiendo la dirección que une los puntos  $A$  y  $B$ ?
- Etc.

El mismo problema anterior puede plantearse en el espacio tridimensional:

2. Comprueba si el punto  $P=(1,2,3)$  pertenece a la recta que pasa por  $A=(1,1,1)$  y  $B=(2,3,4)$ .

$P$  pertenece a la recta que pasa por  $A$  y  $B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AP}$  son linealmente dependientes  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} \vec{AP} \\ \vec{AB} \end{pmatrix} = 1$$

En nuestro caso:

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = (1,2,3) - (1,1,1) = (0,1,2)$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2,3,4) - (1,1,1) = (1,2,3)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \geq 2$$

Podemos entonces concluir que el punto  $P$  NO pertenece a la recta que pasa por  $A$  y  $B$ . ■

Este problema podrá ser propuesto a través de cualquiera de los enunciados equivalentes mostrados en el problema 1.