Matemáticas II. Análisis Matemático.

(Actualizado: domingo, 31 de marzo de 2013)

I. Resumen de resultados teóricos.

a. Continuidad

1. Una función, f, es continua en $x = a$ si $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.
2. Para que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ hace falta que existan los límites laterales y ambos coincidan.
3. Las funciones elementales, y las que resultan de la composición de éstas, son continuas en todo su dominio (funciones polinómicas, racionales, irracionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas).
4. Si dos funciones coinciden en todos los puntos de un intervalo **abierto**, entonces las dos funciones son simultáneamente continuas o discontinuas en cada uno de los puntos de dicho intervalo abierto. Sin embargo esto no es cierto para funciones que coinciden en intervalos cerrados, ya que puede ser que la definición de alguna de ellas cambie al otro lado del extremo del intervalo, pudiendo resultar una continua y la otra discontinua en dicho extremo, tal y como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Estudie la continuidad de la siguiente función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & si\ x < 2 \\ \frac{1}{\sqrt{x+2}} & si\ 2 \le x < 10 \end{cases}$

Resolución.

Denotemos por $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$ y $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$. De esta forma, $f \equiv f_1\ en\ (-\infty, 2)$ y $f \equiv f_2\ en\ [2,10)$.

Puesto que el denominador de f_1 sólo se anula si x=-1, f será continua en $(-\infty,-1) \cup (-1,2)$ y discontinua en $x = -1$.

Como f_2 es continua para todos los valores de x del intervalo **abierto** $(2,10)$ (para dichos valores el radicando es mayor o igual que 0 y el denominador no se anula), f será continua en $(2,10)$.

f no está definida en el intervalo $[10, +\infty)$, luego no podrá ser continua en dicho intervalo.

Falta estudiar la continuidad donde cambia la definición de la función, esto es, en $x = 2$.

$$\left\{\begin{array}{c} f(2) = f_2(2) = \dfrac{1}{\sqrt{2+2}} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow f es\ discontinua\ en\ x = 2$$

En resumen: $$\boldsymbol{f} \begin{cases} \boldsymbol{no\ está\ definida\ en\ x \in [10, +\infty)} \\ \boldsymbol{es\ continua\ en\ x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 10)} \\ \boldsymbol{es\ discontinua\ en\ x \in \{-1, 2\}} \end{cases}$$

b. Derivabilidad

5. Diremos que f es derivable en $x = a$ si existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y es finito. En tal caso, llamaremos derivada de f en $x = a$ al límite anterior, y la denotaremos por $f'(a)$ (también se usan $Df(a)$ y $\frac{df}{dx}(a)$). Recuérdese que el límite anterior sólo existe si los límites laterales existen y coinciden.
6. Una definición equivalente a la anterior es $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Ejemplo

Compruebe que las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$ son derivables en $x = 3$.

Resolución.

$$\left\{\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x^2-2x+1)-(9-6+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+1) = 4\right.$$

Por lo tanto, f es derivable en $x = 3$, siendo $f'(3) = 4$

$$\left\{\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\frac{4x-3\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot 4}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+1)\cdot 4} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+1)\cdot 4} = \frac{1}{16}\right.$$

Luego g es derivable en $x = 3$, siendo $g'(3) = \frac{1}{16}$

7. Una función que no es continua en un punto NUNCA es derivable en ese mismo punto.
8. Las funciones elementales, y las que resultan de la composición de éstas, son derivables en todo su dominio.

Ejemplo

Demuestre que $f(x) = x^3$ es derivable en $x = a$ para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.

Resolución.

Utilizaremos en este ejemplo la definición equivalente propuesta en el punto 6.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a^3+3a^2h+3ah^2+h^3)-a^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(3a^2+3ah+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2) = 3a^2+3a\cdot 0+0^2 = 3a^2$$

Como el valor anterior existe y es finito para cualquier valor de a , podemos concluir que f es derivable en $x = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Además, podemos añadir que, para cualquier valor de a, $f'(a) = 3a^2$, lo que nos permite definir una nueva función a partir de la función f, a la que llamaremos función derivada de f.

9. Llamamos función derivada de la función f a la función f' que a cada valor x de la variable independiente le asigna $f'(x)$ (cuando exista, claro está).

Ejemplo

Halle la función derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Resolución.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot(x+h)\cdot x} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)\cdot x}$$
$$= \frac{-1}{(x+0)\cdot x} = \frac{-1}{x^2}$$

Como el valor anterior existe y es finito para cualquier valor de $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

10. El procedimiento anterior nos permite hallar la función derivada de cualquiera de las funciones elementales, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla de derivadas de las funciones elementales

- $f(x) = \alpha = constante \Longrightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^{\alpha} \Longrightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\forall \alpha \neq 0$, ya que $x^0 = 1$, por lo que la derivada sería la función nula)
- $f(x) = sen(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(x) = -sen(x)$
- $f(x) = \alpha^x \Longrightarrow f'(x) = \alpha^x \ln \alpha \quad [\, f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x \,]$
- $f(x) = \log_{\alpha} x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x\cdot\ln\alpha} \quad [\, f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}]$

Nota: se han excluido las fórmulas para las funciones racionales e irracionales elementales, ya que pueden obtenerse con facilidad utilizando las propiedades de las potencias.

Ejemplo

Halle la función derivada de $f(x) = \frac{1}{x^3}$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \Longrightarrow f(x) = x^{-3} \Longrightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4} \quad \blacksquare$$

$$g(x) = \sqrt[4]{x} \Longrightarrow g(x) = x^{1/4} \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{4}x^{(1/4-1)} = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \quad \blacksquare$$

11. Las funciones que resultan de operar o componer las funciones elementales se pueden derivar utilizando las siguientes reglas de derivación:

Álgebra de derivadas

- $f \equiv g \pm h \Longrightarrow f' \equiv g' \pm h'$ (La derivada de una suma (diferencia) coincide con la suma (diferencia) de las derivadas).
- $f \equiv g \cdot h \Longrightarrow f' \equiv g' \cdot h + g \cdot h'$ (La derivada de un producto coincide con la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor sin derivar por la derivada del segundo).
- $f \equiv \frac{g}{h} \Longrightarrow f' \equiv \frac{g'\cdot h - g\cdot h'}{h^2}$ (La derivada de un cociente coincide con la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, partido todo ello por el denominador al cuadrado).

Ejemplos

- $f(x) = x^5 + x^3 \Longrightarrow f'(x) = (x^5)' + (x^3)' = 5x^4 + 3x^2$
- $f(x) = 7x^5 \Longrightarrow f'(x) = (7)' \cdot x^5 + 7 \cdot (x^5)' = 0 \cdot x^5 + 7 \cdot (5x^4) = 0 + 35x^4 = 35x^4$
- $En\ general: f(x) = k \cdot g(x)\ con\ k\ un\ número\ cualquiera \Longrightarrow$
$$\Longrightarrow f'(x) = (k)' \cdot g(x) + k \cdot g'(x) = 0 + k \cdot g'(x) = k \cdot g'(x)$$
- $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 6x - 1 \Longrightarrow f'(x) = (2x^5)' - (3x^4)' + (6x)' - (1)' = 10x^4 - 12x^3 + 6 - 0$
- $f(x) = \frac{2x^2}{x+3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{(2x^2)' \cdot (x+3) - (2x^2) \cdot (x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{(4x)(x+3) - (2x^2) \cdot (1)}{(x+3)^2} = \frac{4x^2 + 12x - 2x^2}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 12x}{(x+3)^2} = \frac{2x \cdot (x+6)}{(x+3)^2}$

  Nota: obsérvese que tanto numerador como denominador se han dejado descompuestos en factores. Ésta será práctica habitual, pues nos permitirá determinar con mayor facilidad para qué valores de x la derivada es positiva, negativa o nula, y extraer de ello conclusiones importantes acerca de la función original, como se mostrará en la sección dedicada a las aplicaciones de las derivadas.
- $f(x) = x^2 \cdot sen\ x - x^3 \cdot \cos\ x \Longrightarrow f'(x) = [x^2 \cdot sen\ x]' - [x^3 \cdot \cos\ x]' =$
$$= [(x^2)' \cdot sen\ x + x^2 \cdot (sen\ x)'] - [(x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)'] =$$
$$= [2x \cdot sen\ x + x^2 \cdot \cos\ x] - [3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-sen\ x)] =$$
$$= 2x \cdot sen\ x + x^2 \cdot \cos x - 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot sen\ x =$$
$$= x(x^2 + 2) sen\ x - 2x^2 \cos x$$

Regla de la cadena para el cálculo de la derivada de una composición de funciones

$$f \equiv h \circ g \Longrightarrow f'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Nota: las igualdades anteriores serán válidas sólo para los valores de x para los que existan las derivadas de las funciones g y h.

Ejemplos

- $f(x) = e^{3x+1}\ ; f'(x) = e^{3x+1} \cdot 3$
- $f(x) = cos\frac{1}{x}\ ; f'(x) = -sen\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -sen\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}$
- $f(x) = (senx)^2\ ; f'(x) = 2senx \cdot (senx)' = 2senxcosx = sen(2x)$
- $f(x) = \ln\left(cos\left(\frac{2x-1}{x}\right)\right)\ ; f'(x) = \frac{1}{cos\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \left(-sen\left(\frac{2x-1}{x}\right)\right) \cdot \frac{2x-(2x-1)}{x^2} = \frac{-sen\left(\frac{2x-1}{x}\right)}{cos\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-tg\left(\frac{2x-1}{x}\right)}{x^2}$

Nota: cuando el número de funciones compuestas es elevado, resulta conveniente escribir la descomposición antes de derivar. En el ejemplo anterior:

$$x \rightarrow \quad g(x) = \frac{2x-1}{x}$$
$$y \rightarrow \quad h(y) = \cos(y)$$
$$z \rightarrow \quad i(z) = \ln(z)$$

De esta forma, $f \equiv i \circ h \circ g \Longrightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h'(y) \cdot i'(z) = \frac{1}{x^2} \cdot (-seny) \cdot \frac{1}{z}$

Sustituyendo ahora $y = \frac{2x-1}{x}\ ; z = cosy = cos\left(\frac{2x-1}{x}\right)$ se obtendría la expresión del ejemplo anterior.

II. Aplicaciones de las derivadas

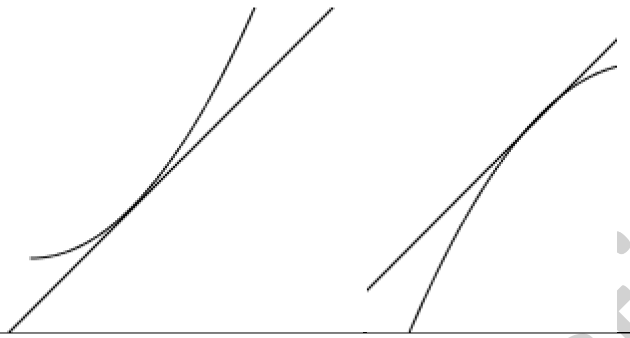
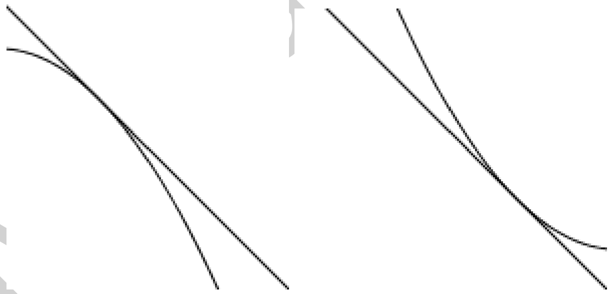
12. En relación con la gráfica de una función, la derivada de dicha función en un punto nos indica la pendiente (inclinación) de la recta tangente a la curva en dicho punto. De esta manera, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en $x = a$ será (siempre que f sea derivable en $x = a$) de la forma

$$\boldsymbol{r}: \boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

(Obsérvese que se trata de la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto de la curva $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$).

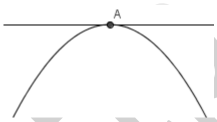
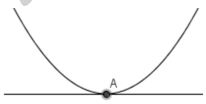
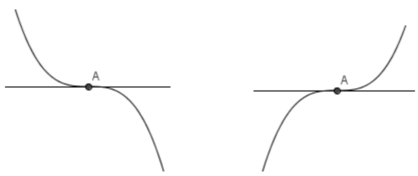
Ejemplo

13. Se deduce de lo anterior que $\begin{cases} si\ f'(a) > 0\ entonces\ f\ es\ creciente\ en\ x = a \\ si\ f'(a) < 0\ entonces\ f\ es\ decreciente\ en\ x = a \end{cases}$. Nótese que la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva (que coincide con la derivada de la función en dicho punto) nos indica si la curva, a su paso por dicho punto, va subiendo o bajando. Al estudio de los intervalos en que la función crece y decrece lo llamaremos también estudio de la monotonía de la función.

Las funciones son crecientes en el punto de tangencia (pendiente positiva-derivada positiva)	Las funciones son decrecientes en el punto de tangencia (pendiente negativa-derivada negativa)
	

Ejemplo

14. A los puntos en los que la derivada es nula (y por lo tanto la recta tangente es horizontal) los llamaremos puntos críticos. Distinguimos dos tipos: extremos relativos (máximos relativos y mínimos relativos) y puntos de inflexión.

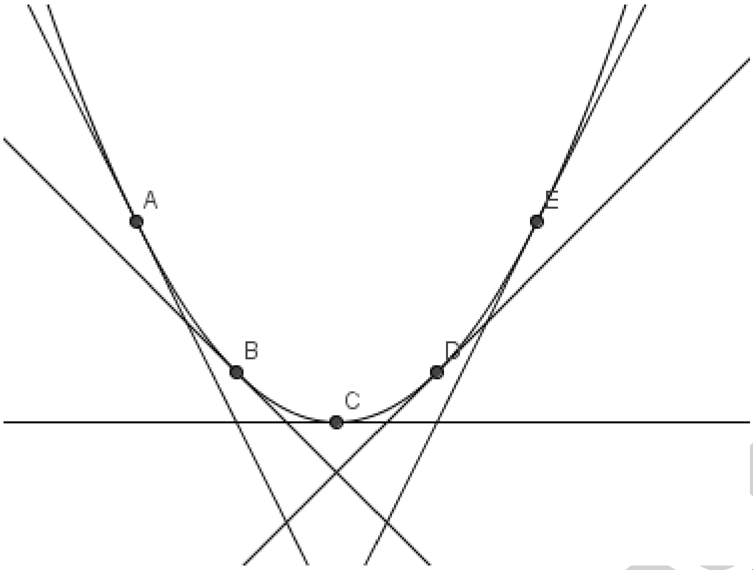
Máximo relativo	Mínimo relativo	Puntos de inflexión
		

Podemos distinguir entre los tipos anteriores si conocemos la derivada de f en los puntos que están a la izquierda y a la derecha de A.

A la izquierda del punto crítico	A la derecha del punto crítico	El punto crítico es
La función crece	La función decrece	Un máximo relativo
La función decrece	La función crece	Un mínimo relativo
La función crece	La función crece	Un punto de inflexión
La función decrece	La función decrece	Un punto de inflexión

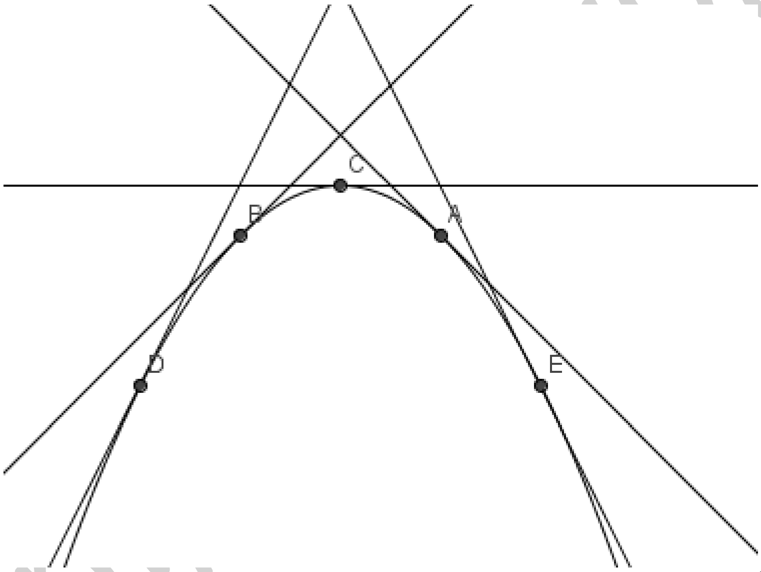
Ejemplo

15. El signo de la segunda derivada nos ofrece información acerca de la curvatura:
    - $f'' > 0 \Longrightarrow f'creciente \Longrightarrow la\ pendiente\ de\ las\ rectas\ tangentes\ va\ aumentando$



$f\ es\ convexa$

- $f'' < 0 \Longrightarrow f'decreciente \Longrightarrow la\ pendiente\ de\ las\ rectas\ tangentes\ va\ disminuyendo$



$f\ es\ cóncava$

- $f'(x) = 0 \Longrightarrow f\ tiene\ en\ x = a\ un\ punto\ de\ inflexión\ (punto\ donde\ cambia\ la\ curvatura)$

III. Problemas de selectividad resueltos. Cálculo diferencial.

Ejercicio 1.- Sea la función f: (0,+∞) → R definida por f(x) = 1/x +ln(x) donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) [1'75 puntos] Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo [1/e, e].
(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e.

2012. Modelo 1. Opción A.

a) La función es continua en el intervalo cerrado $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, por lo que podemos asegurar la existencia de extremos absolutos de la función en dicho intervalo. Éstos se alcanzarán:

- En los extremos del intervalo, o
- Donde la función no sea derivable, o
- Donde la derivada de la función se anule.

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{\frac{1}{e}}+\ln\frac{1}{e}=e+\ln e^{-1}=e-1\cong 1{,}718$$
$$f(e)=\frac{1}{e}+\ln e=\frac{1}{e}+1\cong 1{,}368$$

Como la función es derivable en todo el intervalo, nos queda estudiar dónde se anula su derivada.

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}\Rightarrow\left[f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in\left[\frac{1}{e},e\right]\right]$$
$$f(1)=\frac{1}{1}+\ln 1=1+0=1$$

Con lo anterior, podemos asegurar que:

$$f\ alcanza, en\ el\ intervalo\ \left[\frac{1}{e},e\right], su\ \begin{cases} mínimo\ absoluto\ en\ x=1, siendo\ su\ valor\ f(1)=1 \\ máximo\ absoluto\ en\ x=\frac{1}{e}, siendo\ su\ valor\ f\left(\frac{1}{e}\right)=e-1\end{cases}\quad\blacksquare$$

b) Al ser la función derivable en $x=e$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=e$ es:

$$y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$$

Del apartado anterior sabemos que $f(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$; $f'(e)=\frac{e-1}{e^2}$. Sustituyendo en la expresión anterior, la ecuación de la recta tangente buscada es:

$$y-\frac{1+e}{e}=\frac{e-1}{e^2}\cdot(x-e)\Leftrightarrow e^2y-e(1+e)=(e-1)(x-e)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^2y-e(1+e)=(e-1)x-e(e-1)\Leftrightarrow(e-1)x-e^2y-e(e-1)+e(1+e)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(e-1)x-e^2y-e^2+e+e+e^2=0\Leftrightarrow(e-1)x-e^2y+2e=0\quad\blacksquare$$

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 2$.

(a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
(c) [0'5 puntos] Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

2012. Modelo 1. Opción B.

a) f tendrán asíntotas verticales en $x=-1$ y en $x=2$ (valores que anulan el denominador). Estudiemos el comportamiento de la función respecto de ambas asíntotas.

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\frac{2}{0^-\cdot(-3)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\frac{2}{0^+\cdot(-3)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\frac{8}{3\cdot 0^-}=\frac{8}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\frac{8}{3\cdot 0^+}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

Estudiemos si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = 2$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = 2$$

Luego f tiene asíntota horizontal $y = 2$ tanto si $x \to -\infty$ como si $x \to +\infty$.
Al tener asíntotas horizontales no puede tener asíntotas oblicuas. ■

b) Para estudiar la monotonía de la función necesitamos conocer el signo de su derivada.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-x-1)-2x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{4x^3-4x^2-4x-4x^3+2x^2}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} =$$
$$= \frac{-2x\cdot(x+2)}{(x^2-x-2)^2}$$

f' sólo puede cambiar de signo en los puntos de discontinuidad y donde se anule.
Puesto que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = -2$ y es discontinua en $x = -1$ y $x = 2$, mantendrá el signo en los intervalos $(-\infty,-2), (-2,-1), (-1,0), (0,2), (2,+\infty)$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$-2x$	+	+	+	-	-
$x+2$	-	+	+	+	+
$(x^2-x-2)^2$	+	+	+	+	+
$f'(x) = \frac{-2x\cdot(x+2)}{(x^2-x-2)^2}$	-	+	+	-	-
f	↘	↗	↗	↘	↘

$$f\ es \begin{cases} creciente\ en\ (-2,-1)\cup(-1,0) \\ decreciente\ en\ (-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(2,+\infty) \end{cases}$$

Además, posee asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 2$, tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = -2$ ■

c) La gráfica de f cortará a la asíntota horizontal $y = 2$ allí donde $f(x) = 2$

$$\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2x^2-2x-4 \Leftrightarrow 2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

La gráfica cortará a la asíntota horizontal en el punto $(-2,2)$ ■ (Nótese que buscábamos el punto con $y = 2$)

Ejercicio 1.- Sea la función f : [1; e] → R definida por f(x) = x^2 - 8ln(x) donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) [0'75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
(b) [1 punto] Calcula los extremos absolutos y relativos de la función *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
(c) [0'75 puntos] Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad.

2012. Modelo 2. Opción A.

a) Necesitamos estudiar el signo de $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2-8}{x}$.
Puesto que la derivada es continua salvo en $x = 0 \notin [1,e]$ y sólo se anula si $x = -2 \notin [1,e]$ o $x = 2 \in [1,e]$ sabemos que f' mantendrá el signo en los intervalos $[1,2)$, $(2,e]$

	$[1,2)$	$(2,e]$
$2x^2-8$	$-$	$+$
x	$+$	$+$
$f'(x) = \frac{2x^2-8}{x}$	$-$	$+$

f	↘	↗

Por lo tanto f es $\begin{cases} creciente\ en\ (2,e] \\ decreciente\ en\ [1,2) \end{cases}$. Se deduce además que posee un mínimo relativo en $x=2$ ■

b) Del estudio de la monotonía del apartado anterior se deducen:

- $f\ posee\ máximos\ relativos\ en\ x=1\ y\ en\ x=e$
- $f\ posee\ un\ único\ mínimo\ relativo\ en\ x=2.$

Puesto que la función es continua en $[1,e]$, alcanzará un máximo y un mínimo absoluto en dicho intervalo **cerrado,** que estarán entre los extremos relativos antes enumerados. Así:

- $f\ posee\ un\ mínimo\ absoluto\ en\ \big(2,f(2)\big)=(2{,}4-8\ln 2)\cong(2,-1'55)$
- $f(1)=1-8ln1=1\,;f(e)=e^2-8lne=e^2-8\cong-0'61$, luego
  $f\ posee\ un\ máximo\ relativo\ en\ (e,e^2-8)\ y\ un\ máximo\ absoluto\ en\ (1{,}1)$ ■

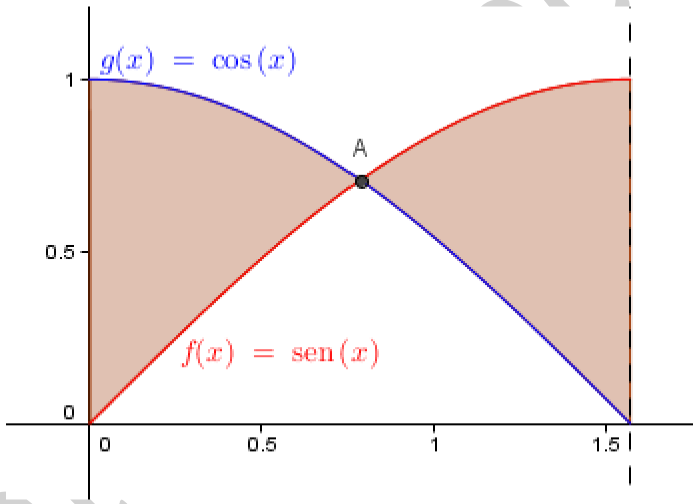
c) Necesitamos conocer el signo de $f''(x)=\frac{4x\cdot x-(2x^2-8)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2+8}{x^2}$. Puesto que no se anula nunca y es continua en el intervalo $[1,e]$, mantendrá el mismo signo en todo el intervalo. Como numerador y denominador son siempre positivos, podemos concluir que $f\ es\ convexa\ en\ todo\ el\ intervalo.$ ■

IV. Problemas de selectividad resueltos. Cálculo integral.

Ejercicio 2.- Sean f, g: R → R las funciones definidas por f(x) = sen(x) y g(x) = cos(x) respectivamente.
(a) [0'75 puntos] Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo [0,π/2].
(b) [1'75 puntos] Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas x=0 y x=π/2.

2012. Modelo 1. Opción A.

a)



b) El área pedida es la de la región sombreada en la representación gráfica anterior.
El punto A de corte de f y g debe cumplir: $senx=cosx\Longrightarrow\frac{sen\,x}{\cos x}=1\Longrightarrow tgx=1\Longrightarrow x=arctg(1)=\frac{\pi}{4}$

Entonces: $Área=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\big(g(x)-f(x)\big)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\big(f(x)-g(x)\big)dx=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}cosx\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}senx\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}senx\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}cosx\,dx=$$

$$=senx]_0^{\frac{\pi}{4}}+cosx]_0^{\frac{\pi}{4}}-cosx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-senx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left(sen\frac{\pi}{4}-sen0\right)+\left(cos\frac{\pi}{4}-cos0\right)-\left(cos\frac{\pi}{2}-cos\frac{\pi}{4}\right)-\left(sen\frac{\pi}{2}-sen\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 1 \quad u^2 \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Sea f la función f: R → R definida por f(x) = $x^2 \cdot \cos(x)$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (π,0).

2012. Modelo 1. Opción B.

Buscamos $F(x) = \int f = \int x^2 cosx\ dx$. Se trata de una de las integrales indefinidas a las que conviene aplicar la integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$. Tomando $\begin{Bmatrix} u = x^2 \Longrightarrow du = 2x\ dx \\ dv = cosx\ dx \Longrightarrow v = \int cosx\ dx = senx \end{Bmatrix}$.

Sustituyendo obtenemos $F(x) = x^2 \cdot senx - \int 2xsenx\ dx$.

El problema se reduce ahora a calcular $I = \int 2xsenx\ dx$. Volviendo a integrar por partes $\begin{Bmatrix} u = 2x \Longrightarrow du = 2\ dx \\ dv = senx\ dx \Longrightarrow v = \int senx\ dx = -\cos x \end{Bmatrix}$.Sustituyendo, $I = -2xcosx - \int -2cosxdx = -2xcosx + 2senx$.

Entonces las primitivas de f son todas las funciones de la forma $F(x) = x^2 senx + 2xcosx - 2senx + C, con\ C \in \mathbb{R}$.

Puesto que debe pasar por el punto $(\pi, 0)$ tiene que cumplirse $F(\pi) = 0$, luego:

$$\pi^2 \cdot sen\pi + 2\pi cos\pi - 2sen\pi + C = 0 \Leftrightarrow 0 - 2\pi - 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 2\pi$$

La primitiva buscada es $F(x) = x^2 senx + 2xcosx - 2senx + 2\pi$ $\blacksquare$

Ejercicio 2.- Sea f : R → R la función definida por f(x) = x^3 - 4x
(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.
(b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = -x - 2, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
(c) [1 punto] Calcula el área del recinto anterior.

2012. Modelo 2. Opción A.

a) La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$f(1) = 1 - 4 = 3$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4 \Longrightarrow f'(1) = 3 - 4 = -1$$

Sustituyendo, la ecuación de la recta buscada es $y - 3 = -1(x - 1) \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$ $\blacksquare$

b) Los puntos de corte vendrán dados por las soluciones de la ecuación

$$x^3 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

Aplicando la regla de Ruffini

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1\ (doble)\ ó\ x = -2$$

$$f(-2) = -8 - 4(-2) = 0\ ;\ f(1) = 3$$

Los puntos de corte son $(-2,0) y\ (1,3)$.

Estudiemos el comportamiento de f en el intervalo $[-2,1]$

$$f'(x) = 3x^2 - 4\,; \left[f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\ (sólo\ \ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\ está\ en\ el\ intervalo[-2{,}1]) \right]$$

$$f'mantiene\ el\ signo\ en\ los\ intervalos\ \left[-2, \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)\ y\ \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, 1\right]$$

	$\left[-2, \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, 1\right]$
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

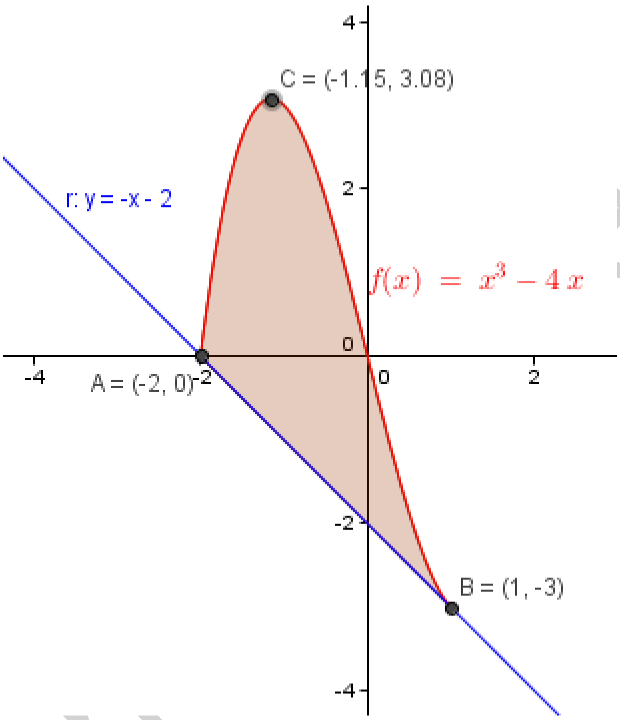
$$f\ crece\ en\ \left[-2, \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)\ , decrece\ en \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, 1\right]\ y\ tiene\ por\ ello\ un\ máximo\ relativo\ en\ x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}.$$

El máximo estará en el punto $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, f(\frac{-2\sqrt{3}}{3})\right) = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{-24\sqrt{3}}{27} + \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$

(Aproximadamente, $máximo \cong (-1'15\,, 3'08)$)

También $f(0) = 0$

Podemos esbozar ahora el recinto solicitado



c) $Área = \int_{-2}^{1} |f(x) - (-x-2)|\, dx = \int_{-2}^{1} |x^3 - 3x + 2| dx$. Puesto que la gráfica de f está por encima de la recta en todo el intervalo, la función resultante es positiva y podemos eliminar el valor absoluto.

$$Área = \int_{-2}^{1} x^3 - 3x + 2\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4\right) = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4} u^2 \ \blacksquare$$

Añadir:

Teorema de Bolzano.

Regla de L'Hôpital.

Asíntotas.

Extremos absolutos de una función. Toda función continua en un intervalo cerrado posee extremos absolutos en él.

Problemas de optimización.

Teorema fundamental del cálculo integral.

Cálculo de primitivas elementales.

Regla de Barrow.

Cálculo de áreas del recinto limitado por una curva y el eje horizontal.

Cálculo de áreas de recintos limitados por varias curvas.

Obtención de primitivas por cambio de variable.

Obtención de primitivas de funciones racionales.

Integración por partes.