Problemas de la prueba de acceso a la Universidad.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Análisis Matemático.

EJERCICIO 2

De la función *f* se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$.

a) **(1'5 puntos)** Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.

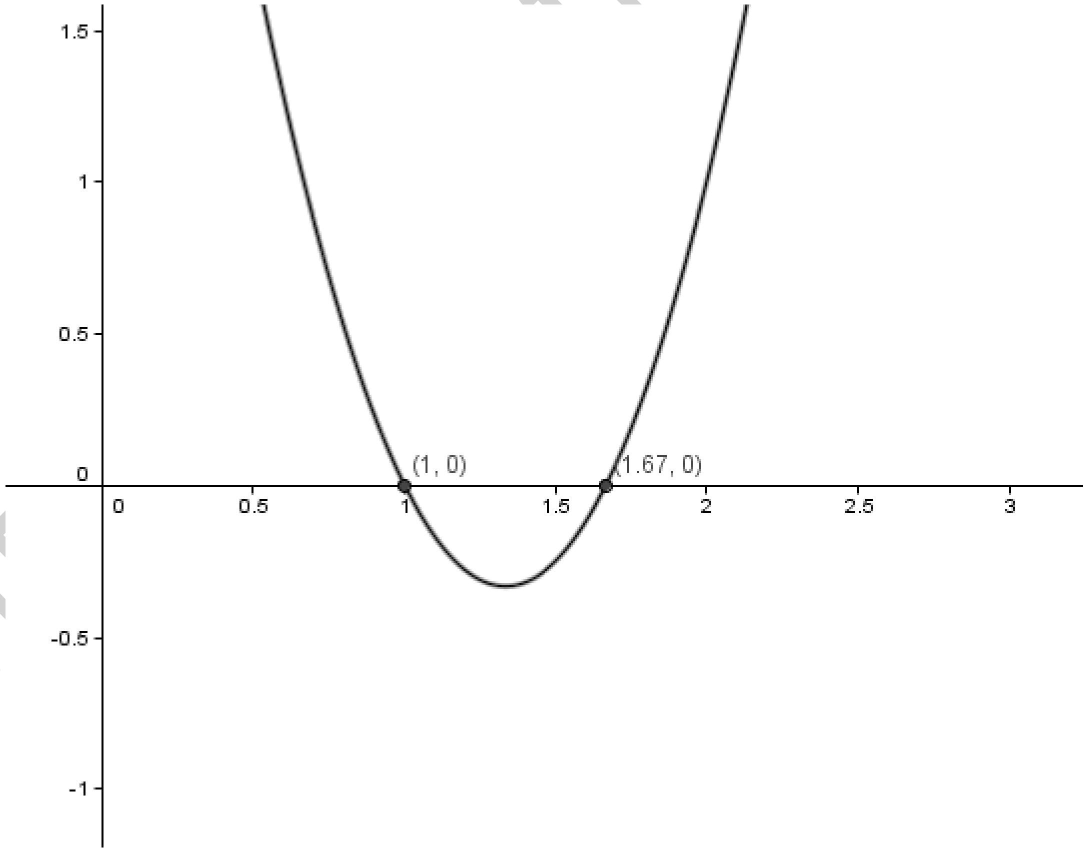
b) **(1 punto)** Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto (1, 1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

(Curso 2011-12. Andalucía. Modelo 1. Opción A.)

a) **Monotonía.** Planteamiento: sabemos que $\begin{cases} f'(a) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x = a \\ f'(a) < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente en } x = a \end{cases}$

Estudiemos por ello el signo de f'.

- La gráfica de f' es una parábola (por ser un polinomio de 2º grado) convexa (por ser el coeficiente líder positivo) que se anula si $3x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ ó $x = 1$.
- La gráfica de f' es por lo anterior de la siguiente forma



- Resulta entonces evidente que $\begin{cases} f' > 0 \text{ en } (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty) \\ f' < 0 \text{ en } (1, \frac{5}{3}) \end{cases}$

- Podemos concluir que: $\begin{cases} \boldsymbol{f\ es\ creciente\ en}\ (-\infty,\mathbf{1}) \cup (\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},+\infty) \\ \boldsymbol{f\ es\ decreciente\ \ en}\ (\mathbf{1},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}) \end{cases}$

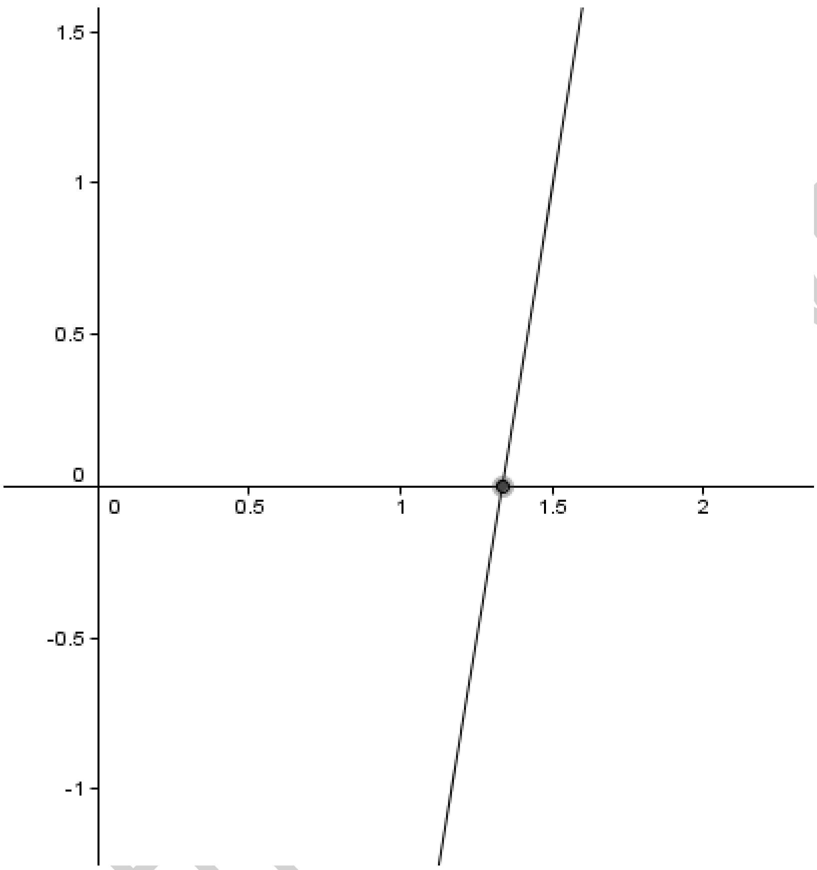
Curvatura. Planteamiento: sabemos que $\begin{cases} f''(a) > 0 \Rightarrow f'creciente\ \ en\ x = a \Rightarrow f\ convexa\ \ en\ x = a \quad (\cup) \\ f''(a) < 0 \Rightarrow f'decreciente\ en\ x = a \Rightarrow f\ cóncava\ en\ x = a \ \ (\cap) \end{cases}$

Hallemos entonces f'' y estudiemos su signo.

$$f''(x) = 6x - 8$$

La gráfica de f'' es una recta (por ser un polinomio de 1er grado) creciente (por ser su coeficiente líder positivo) que sólo se anula si $\quad 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

La gráfica de f'' es por lo anterior de la forma



Resulta entonces evidente que

$$\begin{cases} f'' > 0\ en\ (\frac{4}{3},+\infty) \\ f'' < 0\ en\ (-\infty,\frac{4}{3}) \end{cases}$$

Podemos concluir:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f\ es\ convexa\ en}\ \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},+\infty\right) \quad (\cup) \\ \boldsymbol{f\ es\ cóncava\ en}\ \left(-\infty,\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right) \quad (\cap) \end{cases}$$

b) Planteamiento: sabemos que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas(a, f(a)) tiene ecuación $\qquad y - f(a) = f'(a)(x - a)$ (Evidentemente, siempre que existan $f(a)\ y\ \ f'(a)$)

En nuestro caso, $\begin{cases} a = 1 \\ f(a) = f(1) = 1\ \big(ya\ que\ pasa\ por\ (1,1)\big) \\ f'(a) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 5 = 0 \end{cases}$

Sustituyendo, podemos concluir que la ecuación de la recta tangente buscada es:

$$\boldsymbol{y - 1 = 0 \cdot (x - 1)}, que\ simplificando\ resulta\ en\ \boldsymbol{y = 1}$$

EJERCICIO 2

a) **(1'25 puntos)** Dada la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$, determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo en $x = -2$.

b) **(1'25 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)=3x^2 - 2x + 1$, en el punto de abscisa $x = 1$.

(Curso 2011-12. Andalucía. Modelo 1. Opción B.)

a) Planteamiento:
- La gráfica pasa por el punto (1,3) si y sólo si f(1)=3.
- Como f es derivable en x = -2, podemos asegurar que:

si f alcanza un extremo en x = -2 entonces f'(-2)=0

De las dos condiciones anteriores se deduce:

- $f(1) = 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 3 \Leftrightarrow 2 + a + b = 3 \Leftrightarrow a + b = 2$
- $f'(x) = 4x + a, luego\ f'(-2) = 4 \cdot (-2) + a = 0 \Leftrightarrow -8 + a = 0 \Leftrightarrow a = 8$

Así, el par (a, b) buscado tiene que ser solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} a + b = 2 \\ a = 8 \end{cases}$

Por lo tanto $\begin{cases} \boldsymbol{a = 8} \\ \boldsymbol{b = -6} \end{cases}$

b) Planteamiento: por ser la función g derivable en $x = 1$, la ecuación de la recta tangente buscada será

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1)$$

Calculando obtenemos: $\begin{cases} g(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2 \\ g'(x) = 6x - 2 \Rightarrow g'(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4 \end{cases}$

Sustituyendo, la ecuación de la recta buscada es: $\boldsymbol{y - 2 = 4(x - 1)}$ que operando y trasponiendo términos resulta en $\boldsymbol{4x - y - 2 = 0}$